Musterlösungen zum Buch *Mathematik für Software Engineering*

Stephan Dreiseitl

2 | Logik als Sprache der Mathematik

2.1 Aussagenlogik

2.1 (Ü.1)

(a) $\underbrace{\neg\underbrace{(A\wedge\underbrace{(B\Rightarrow A)}_{\text{Implikation}})}_{\text{Konjunktion}}}_{\text{Negation}}$

(b) $\underbrace{A\vee\underbrace{(\underbrace{\neg B}_{\text{Negation}}\vee C)}_{\text{Disjunktion}}}_{\text{Disjunktion}}$

(c) $\underbrace{\underbrace{(A\vee D)}_{\text{Disjunktion}}\wedge\underbrace{\neg\underbrace{(\underbrace{\neg B}_{\text{Negation}}\vee C)}_{\text{Disjunktion}}}_{\text{Negation}}}_{\text{Konjunktion}}$

2.1 (Ü.3)

(a)

A	B	$B\Rightarrow A$	$A\wedge(B\Rightarrow A)$
f	f	w	f
f	w	f	f
w	f	w	w
w	w	w	w

(b)

A	B	$A\wedge B$	$\neg(A\wedge B)$	$A\vee\neg(A\wedge B)$
f	f	f	w	w
f	w	f	w	w
w	f	f	w	w
w	w	w	f	w

(c)

A	B	$\neg B$	$A\wedge\neg B$	$B\Rightarrow(A\wedge\neg B)$
f	f	w	f	w
f	w	f	f	f
w	f	w	w	w
w	w	f	f	f

2.1 (Ü.5)

(a) 4 Zeilen

(b) 16 Zeilen

(c) 2^n Zeilen

2.1 (Ü.7)

(a)

x	y	$x \wedge \neg y$	$y \wedge \neg x$	$(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$	$x \otimes y$
f	f	f	f	f	f
f	w	f	w	w	w
w	f	w	f	w	w
w	w	f	f	f	f

(b)

x	y	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow x$	$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$	$x \Leftrightarrow y$
f	f	w	w	w	w
f	w	w	f	f	f
w	f	f	w	f	f
w	w	w	w	w	w

2.1 (Ü.9) Wenn die beiden Aussagen „Wenn das Essen schmeckt, hat Klaus gute Laune“ und „Das Essen schmeckt“ wahr sind, dann ist auch die Aussage „Klaus hat gute Laune“ auch wahr.

2.1 (Ü.11)

c	x	y	IF c THEN x ELSE y
f	f	f	f
f	f	w	w
f	w	f	f
f	w	w	w
w	f	f	f
w	f	w	f
w	w	f	w
w	w	w	w

2.1 (Ü.13) Der Algorithmus zur Bestimmung der sogenannten *disjunktiven Normalform* einer Aussage lässt sich folgendermaßen beschreiben:

Iteriere für jede Zeile der Wahrheitstabelle der gegebenen Aussage, in der `w` steht:

  Iteriere über alle atomaren Aussagen, aus denen sich die gegebene Aussage zusammensetzt:

    Wenn die atomare Aussage `w` ist, nimm diese atomare Aussage

    Wenn die atomare Aussage `f` ist, nimm die Negation dieser atomaren Aussage

  Bilde die Konjunktion aller so erhaltener Aussagen

Bilde die Disjunktion aller so erhaltener Konjunktionen

Anwenden dieses Algorithmus liefert

(a) $\neg x \wedge y$

(b) $(\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$

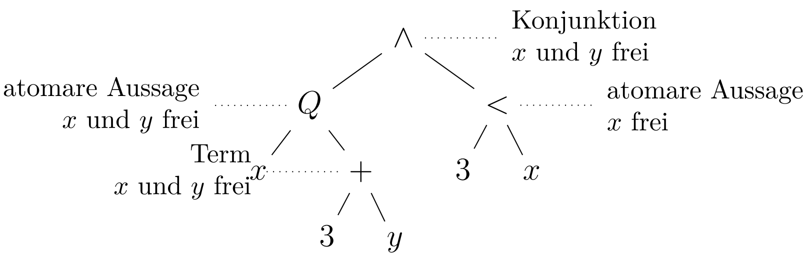
2.2 Bausteine der Prädikatenlogik

2.2 (Ü.1)

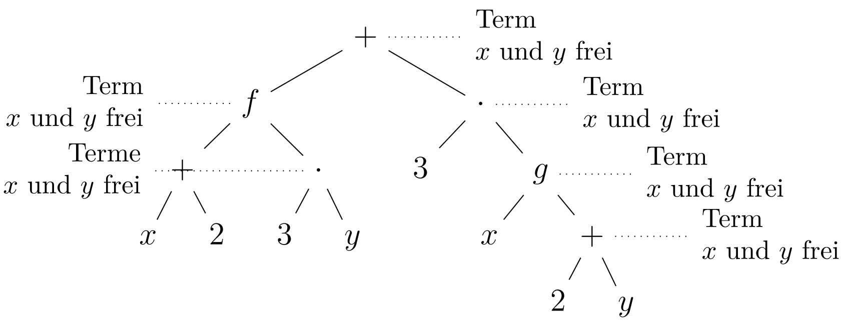
- **(a)** Aussage
- **(b)** syntaktisch inkorrekt
- **(c)** Aussage
- **(d)** syntaktisch inkorrekt
- **(e)** Aussage

2.2 (Ü.3)

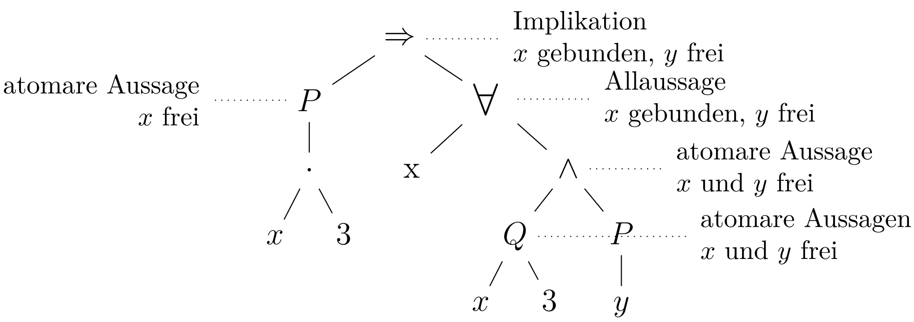
(a)



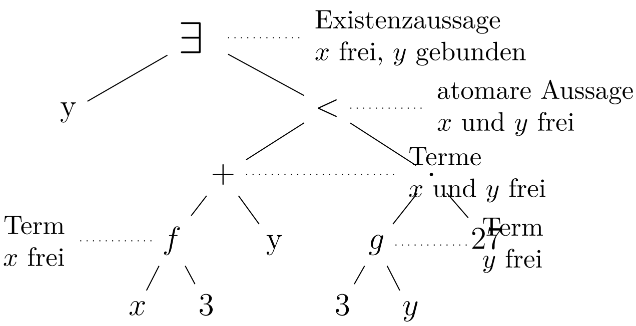
(b)



(c)



(d)



2.3 Modellieren und Argumentieren in der Prädikatenlogik

2.3 (Ü.1)

(a) „Es gibt zwei Zahlen, deren Summe null ist" – wahr.

(b) „Zu jeder Zahl gibt es eine Zahl, die zur ersten addiert null ergibt" – wahr.

(c) „Es gibt eine Zahl, die zu jeder Zahl addiert null ergibt" – falsch.

(d) „Die Summe zweier beliebiger Zahlen ist null" – falsch.

2.3 (Ü.3) Mögliche Antworten sind die folgenden; Varianten sind auch möglich:

(a) $\exists\, x \ \exists\, y \ x \neq y \wedge \text{istKatze}(x) \wedge \text{istKatze}(y) \wedge \text{sindGeschwister}(x, y)$

(b) $\forall x \ \big(\text{istMensch}(x) \wedge \text{istWeiblich}(x) \wedge \text{studiert}(x, \text{Informatik})\big) \Rightarrow \text{hatInteresseAn}(x, \text{Mathematik})$

(c) $\forall x \ \text{istMensch}(x) \Rightarrow \exists\, y \ \text{istMensch}(x) \wedge \text{istVaterVon}(y, x)$

2.3 (Ü.5)

(a) „Alle Sonnenaufgänge sind nicht grün".

(b) „Jedes Glas ist nicht kratzfest".

(c) „Alle Flüssigkeiten sind nass".

2.3 (Ü.7)

(a) Das Objekt „Katze" ist nicht gleich dem Objekt „grau".

(b) $\text{istKatze}(x)$ ist eine atomare Aussage, und kann nicht mit $=$ mit einem Term verglichen werden.

(c) $\text{istKatze}(x)$ ist eine atomare Aussage, und kann nicht mit $=$ mit der atomaren Aussage $\text{istGrau}(x)$ verglichen werden.

(d) $\text{istGrau}(x)$ ist eine atomare Aussage, und kann nicht Argument der Prädikatenkonstanten *istKatze* sein.

(e) $x = \text{grau}$ ist eine atomare Aussage, und kann nicht Argument der Prädikatenkonstanten *istKatze* sein.

(f) Diese Aussage wäre auch wahr in einem Universum, in dem es keine Katze gibt: Dann wäre nämlich $\text{istKatze}(x)$ falsch, und damit die Implikation sowie auch die gesamte Existenzaussage wahr.

2.3 (Ü.9)

(a) $\text{goldbach}(8)$ ist wahr etwa für die Variablenbelegungen $x \leftarrow 3$ und $y \leftarrow 5$.

(b) $\text{goldbach}(22)$ ist wahr etwa für die Variablenbelegungen $x \leftarrow 11$ und $y \leftarrow 11$.

(c) $\text{goldbach}(42)$ ist wahr etwa für die Variablenbelegungen $x \leftarrow 11$ und $y \leftarrow 31$.

2.3 (Ü.11)

(a) $\text{istQuadratZahl}(x) :\Leftrightarrow \exists\, y \ y \cdot y = x$

(b) $\text{istSummeUnterschiedlicherPrimzahlen}(x) :\Leftrightarrow \exists\, y \ \exists\, z \ y \neq z \wedge \text{prim}y \wedge \text{prim}(z) \wedge x = y \cdot y + z \cdot z.$

(c) $\text{perfekt}(n) :\Leftrightarrow \sum_{x | n \wedge x \neq n} x$

2.3 (Ü.13)

Gegeben: n

wobei wobei n eine natürliche Zahl ist

Gesucht: x, y

sodass x und y natürliche Zahlen sind, und es gilt $x \,|\, n \ \wedge \ y \,|\, n \ \wedge \ x < y$

2.3 (Ü.15)

GEGEBEN: S

wobei wobei S eine natürliche Zahl ist

GESUCHT: n

sodass n eine natürliche Zahl ist, und es gilt $n \leq S \wedge (\exists x, y \ x \neq y \wedge n = x \cdot x + y \cdot y) \wedge \neg\exists m \ m < n \wedge m \leq S \wedge \exists x, y \ x \neq y \wedge m = x \cdot x + y \cdot y$

2.3 (Ü.17) $prim(x) :\Leftrightarrow x \neq 1 \wedge \forall y \ y = 1 \vee y = x \vee y \nmid x$

2.3 (Ü.19)

(a) $\exists x \ 1 \leq x < 40 \wedge \neg\mathrm{prim}(x^2 + x + 41)$

(b) $\exists m \ \forall k \ m \neq 2k \wedge m \neq 2k + 1$

(c) $\exists p \ p \geq 2 \wedge \forall n \ (n \geq 2) \Rightarrow \neg\mathrm{prim}(p) \vee p > n$

2.3 (Ü.21) $\forall S \ \exists p \ p > S \wedge \mathrm{prim}(p) \wedge \neg\mathrm{prim}(p + 2)$

2.3 (Ü.23) Wir nehmen für einen Widerspruchbeweis das Gegenteil an, also $\exists n \ \forall m \ m \mid n$. Wir nennen dieses n, dessen Existenz wir kennen, n^*. Da die Aussage $m \mid n^*$ ja *für alle* m gilt, gilt sie speziell auch für die Variablenbelegung $m \leftarrow n^* + 1$; diese Zahl ist auch wieder eine natürliche Zahl. Mit der Definition der Teilbarkeit wissen wir somit $\exists z \ z(n^* + 1) = n^*$. Umformen liefert $\exists z \ n^*(z - 1) + z = 0$. Daraus erhalten wir den gesuchten Widerspruch: Entweder ist $z = 1$, dann ist der erste Summand zwar null, der Widerspruch ist aber $1 = 0$. Oder $z > 1$, dann wäre die Summe zweier natürlicher Zahlen null, was auch wieder ein Widerspruch ist.

2.3 (Ü.25)

(a) 20

(b) 5

2.3 (Ü.27)

GEGEBEN: n

wobei wobei S eine natürliche Zahl ist

GESUCHT: w

sodass w eine natürliche Zahl ist, und es gilt $w \cdot w \leq n \wedge (w + 1) \cdot (w + 1) > n$

3 | Mengen als Bausteine der Mathematik

3.1 Das Prädikat *istElementVon*

3.1 (Ü.1)

(a) falsch
(b) wahr
(c) falsch
(d) falsch
(e) wahr
(f) falsch

3.2 Mengenbildung: Mengen aus Elementen

3.2 (Ü.1)

(a) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 10 \wedge \text{gerade}(x)\}$
(b) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 8 \leq x \leq 14 \wedge \text{gerade}(x)\}$
(c) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 10 \leq x \leq 20 \wedge \text{prim}(x)\}$

3.2 (Ü.3)

(a) $\{x \mid \neg\text{gerade}(x) \vee \neg\text{prim}(x)\}$
(b) $\{x \mid \neg\text{gerade}(x) \wedge \text{prim}(x)\}$
(c) $\{x \mid \text{prim}(x \cdot x)\}$

3.2 (Ü.5)

(a) Die Variablen x und y müssen auf der rechten Seite der Definition frei sein.
(b) Die beiden Teile $z \neq 1 \nmid x$ und $z \neq 1 \nmid y$ sind syntaktisch falsch.
(c) Sowohl syntaktisch als auch semantisch korrekt.
(d) Sowohl syntaktisch als auch semantisch korrekt.
(e) Syntaktisch korrekt, semantisch aber falsch: die Aussage auf der rechten Seite der Definition ist für alle Kombinationen von x und y wahr.

3.2 (Ü.7) Wir formulieren einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass es außer 3, 5 und 7 noch drei weitere Zahlen x, $x+2$ und $x+4$ gibt, die alle Primzahlen sind. Wir wissen weiters, dass von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen genau eine von 3 geteilt wird. Wir betrachten nun die drei aufeinanderfolgenden Zahlen $x+1$, $x+2$ und $x+3$, und machen eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $x+1$ wird von 3 geteilt. Dann wird auch $x+4$ von 3 geteilt, im Widerspruch zur Annahme, dass das eine Primzahl ist.

Fall 2: $x+2$ wird von 3 geteilt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass das eine Primzahl ist.

Fall 3: $x+3$ wird von 3 geteilt. Dann wird auch x von 3 geteilt, im Widerspruch zur Annahme, dass das eine Primzahl ungleich 3 ist.

3.3 Mengenbildung: Mengen aus Mengen

3.3 (Ü.1)
- **(a)** falsch
- **(b)** wahr
- **(c)** wahr
- **(d)** falsch

3.3 (Ü.3)
- **(a)** falsch
- **(b)** falsch
- **(c)** falsch
- **(d)** wahr
- **(e)** falsch
- **(f)** wahr
- **(g)** wahr
- **(h)** wahr

3.3 (Ü.5) Einsetzen in die Definition der Teilmengenrelation liefert

$$(x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x) \equiv (\forall z \; z \in x \Rightarrow z \in y) \wedge (\forall z \; z \in y \Rightarrow z \in x)$$

und umgeformt

$$\equiv \forall z \; (z \in x \Rightarrow z \in y) \wedge (z \in y \Rightarrow z \in x).$$

Wegen

$$\alpha \Leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$$

ist dies wie gefordert gleichwertig mit $\forall z \; z \in x \Leftrightarrow z \in y$.

3.3 (Ü.7)
- **(a)** $\{a, b, \{c\}, c\}$
- **(b)** $\{a, b\}$
- **(c)** $\{\{c\}\}$
- **(d)** $\{a, \{b, c\}, d, e, \{b, c, d\}\}$
- **(e)** $\{a, e\}$
- **(f)** $\{a, \{b, c\}, d\}$

3.3 (Ü.9)
- **(a)** falsch
- **(b)** wahr
- **(c)** wahr
- **(d)** wahr

3.3 (Ü.11) Seien x und y beliebig aber fix. Wir beweisen

$$x \setminus y = \varnothing \Rightarrow x \subseteq y\,.$$

Wir zerlegen die Implikation in

wir wissen $x \setminus y = \varnothing$

zu zeigen $x \subseteq y$.

Einsetzen in die Definitionen dieser Mengenoperationen liefert

wir wissen $\{z \mid z \in x \wedge \neg z \in y\} = \varnothing$

zu zeigen $\forall s \; s \in x \Rightarrow s \in y$.

Sei also auch s beliebig aber fix. Wir zerlegen wiederum die Implikation in der *zu zeigen*-Zeile. Aus der *wir wissen*-Zeile folgt, dass kein Element die definierende Eigenschaft der Menge erfüllt, also alle Elemente die definierende Eigenschaft nicht erfüllen:

wir wissen $\forall z \; \neg(z \in x \wedge \neg z \in y)$

wir wissen $s \in x$

zu zeigen $s \in y$.

Mit der De Morgan-Regel und $\alpha \Rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$ können wir die *wir wissen*-Zeile umformen zu

wir wissen $\forall z \; z \in x \Rightarrow z \in y$.

Diese Aussage gilt für alle z, damit auch speziell für die Belegung $z \leftarrow s$:

wir wissen $s \in x \Rightarrow s \in y$.

Da wir auch $s \in x$ wissen, folgt mit modus ponens die zu zeigende Aussage.

3.3 (Ü.13) Man definiert

$$\bigcup x := \Big\{z \mid \underset{y \in x}{\exists} z \in \Big\}$$

und

$$\bigcap x := \Big\{z \mid \underset{y \in x}{\forall} z \in \Big\}.$$

Damit gelten

$$\bigcup \varnothing = \Big\{z \mid \underset{y \in \varnothing}{\exists} z \in \Big\} = \Big\{z \mid f\Big\} = \varnothing$$

und

$$\bigcap \varnothing = \Big\{z \mid \underset{y \in \varnothing}{\forall} z \in \Big\} = \Big\{z \mid \mathtt{w}\Big\}.$$

Da jede Menge die charakterisierende Eigenschaft $\mathtt{w}$ erfüllt, ist $\{z \mid \mathtt{w}\}$ die Menge aller Mengen, die nicht definiert ist.

3.3 (Ü.15) $\bigcup \mathrm{Pot}(\{1,2\}) = \{1,2\}$ und $\bigcap \mathrm{Pot}(\{1,2\}) = \varnothing$. Allgemein gelten $\bigcup \mathrm{Pot}(x) = x$ und $\bigcap \mathrm{Pot}(x) = \varnothing$.

3.3 (Ü.17)

Gegeben: A

wobei wobei A eine Menge ist

Gesucht: B_1, B_2

sodass B_1 und B_2 Mengen sind, und es gilt $B_2 = A \setminus B_1 \wedge |\sum_{x \in B_1} x - \sum_{x \in B_2} x| = \min_{\substack{(r,s) \\ s = A \setminus r}} |\sum_{x \in r} x - \sum_{x \in s} x|$

3.4 Mengenbildung: Tupel

3.4 (Ü.1)
(a) falsch
(b) falsch
(c) wahr

3.4 (Ü.3) Es gelten

$$\mathrm{Pot}(\{a\} \times \{b\}) = \mathrm{Pot}(\{(a,b)\} = \{\varnothing, \{(a,b)\}\}$$

und

$$\mathrm{Pot}(\{a\} \times \{b\}) = \{\varnothing, \{a\}\} \times \{\varnothing, \{b\}\} = \\ \{(\varnothing,\varnothing), (\varnothing,\{b\}), (\{a\},\varnothing), (\{a\},\{b\})\},$$

$\mathrm{Pot}(x \times y) = \mathrm{Pot}(x) \times \mathrm{Pot}(y)$ gilt also nicht immer. Es gilt sogar nie, da $\mathrm{Pot}(x \times y)$ eine Menge von Teilmengen ist, und $\mathrm{Pot}(x) \times \mathrm{Pot}(y)$ eine Menge von Paaren.

3.5 Prädikate als Mengen

3.5 (Ü.1) Alle angegebenen Mengen sind Relationen auf $\{1,2\} \times \{3,4\}$.

3.5 (Ü.3)

(a) (Man beachte die verzerrten Achsen)

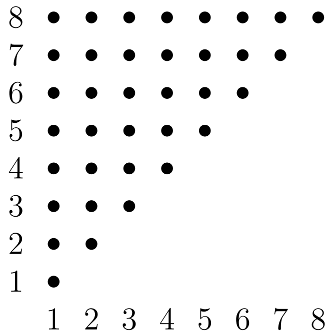
30	•							
15		•						
10			•					
6				•				
5					•			
3						•		
2							•	
1								•
	1	2	3	5	6	10	15	30

(b)

4	•			
3		•		
2			•	
1				•
	1	2	3	4

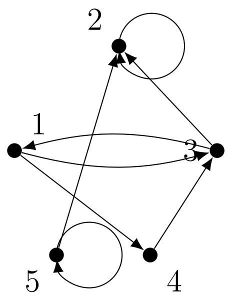
(c) Die *teilt*-Relation ist in Beispiel 3.17 visualisiert.

(d)



3.5 (Ü.5)

(a)



(b) $\{x \mid (x, 5) \in R\} = \{5\}$ und $\{y \mid P(3, y)\} = \{1, 2\}$

3.5 (Ü.7)

(a) reflexiv, transitiv, antisymmetrisch
(b) symmetrisch, irreflexiv
(c) (keine der Eigenschaften ist erfüllt)
(d) antisymmetrisch
(e) irreflexiv, asymmetrisch, antisymmetrisch
(f) symmetrisch, transitiv, irreflexiv, asymmetrisch, antisymmetrisch

3.5 (Ü.9) Wir beweisen für beliebig aber fixe Relation R auf einer Menge M die Aussage „asymmetrisch(R) $\Rightarrow$ antisymmetrisch(R).“

$$\textit{wir wissen} \qquad \underset{x,y \in M}{\forall} (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$$

$$\textit{zu zeigen} \qquad \underset{x,y \in M}{\forall} \Big((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R\Big) \Rightarrow x = y$$

Seien x, y beliebig aber fix, und wir zerlegen diesmal *nicht* die Implikation in der *zu zeigen*-Zeile:

$$\textit{wir wissen} \qquad \underset{x,y \in M}{\forall} (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$$

$$\textit{zu zeigen} \qquad \Big((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R\Big) \Rightarrow x = y$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $(x, y) \in R$. Mit modus ponens folgt aus der *wir wissen*-Zeile, dass $(y, x) \notin R$ gilt. Somit ist die linke Seite der Implikation falsch, und die gesamte zu zeigende Implikation wahr.

Fall 2: $(x, y) \notin R$. Dann ist die linke Seite der Implikation falsch, und die gesamte zu zeigende Implikation wahr.

3.5 (Ü.11) Wir beweisen für beliebig aber fixe Relation R auf einer Menge M die Aussage „asymmetrisch(R) $\Rightarrow$ irreflexiv(R).“

wir wissen $\quad \underset{x,y \in M}{\forall} (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$

zu zeigen $\quad \underset{x \in M}{\forall} (x, x) \notin R$

Sei x beliebig aber fix. Die Aussage in der *wir wissen*-Zeile gilt für alle Variablenbelegungen, wir wählen für beide Variablen die Belegung mit dem beliebig aber fixen Wert x aus der *zu zeigen*-Zeile:

wir wissen $\quad (x, x) \in R \Rightarrow (x, x) \notin R$

zu zeigen $\quad (x, x) \notin R$

Wir machen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $(x, x) \in R$ gilt. Mit modus ponens erhalten wir aus der *wir wissen*-Zeile dann $(x, x) \notin R$, einen Widerspruch. Deswegen gilt $(x, x) \notin R$.

3.6 Äquivalenzrelationen und Ordnungen

3.6 (Ü.1)

Gegeben: x, y

wobei wobei $x, y \in \mathbb{Z} \wedge y \neq 0$

Gesucht: q, r

sodass $q, r \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq |r| \leq |y| \wedge \operatorname{sgn}(r) = \operatorname{sgn}(y)$

(für Variante 1, oder)

$\operatorname{sgn}(r) = \operatorname{sgn}(x)$ (für Variante 2)

3.6 (Ü.3) $R_5 = \{(1, 6), (-3, 2), (-41, 19), (3, 8), (14, 39), \dots\}$.

$[0] = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$

$[1] = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$

$[2] = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$

$[3] = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$

$[4] = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$

$[5] = [0]$

$\dots$

3.6 (Ü.5) Zu zeigen ist

wir wissen $\quad [x] \neq [y]$

zu zeigen $\quad [x] \cap [y] = \varnothing$

Einsetzen in die Definitionen von Äquivalenzklassen, Mengengleichheit bzw. Mengendurchschnitt liefert

wir wissen $\quad \exists s \; s \sim x \wedge \neg(s \sim y)$

zu zeigen $\quad \neg\exists z \; z \sim x \wedge z \sim y$

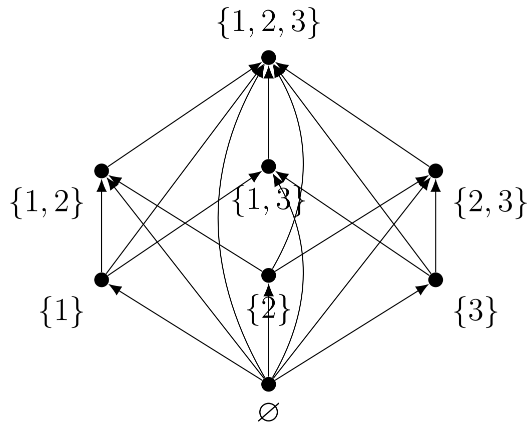
(wobei die *wir wissen*-Zeile auch als $\exists s\ s \sim y \land \neg(s \sim x)$ formuliert werden könnte). Wir formulieren einen Widerspruchsbeweis, nehmen also an, dass ein solches z existiert:

wir wissen $\exists s\ s \sim x \land \neg(s \sim y)$

wir wissen $\exists z\ z \sim x \land z \sim y$

Wegen der Transitivität einer Äquivalenzrelation gelten dann $z \sim s$ und auch $s \sim y$, was ein Widerspruch zu $\neg(s \sim y)$ ist.

3.6 (Ü.7) Zur leichteren Lesbarkeit werden in folgendem Diagramm alle Selbstpfeile weggelassen:



3.6 (Ü.9) Die *teilt*-Relation auf $\mathbb{N}$ ist reflexiv, da jede natürliche Zahl das einfache Vielfache von sich selbst ist. Ebenso ist *teilt* transitiv: Falls $x \,|\, y$ und $y \,|\, z$ gilt, dann ist y das α-fache Vielfache von x, und z das β-fache Vielfache von y. Somit ist z das $\alpha \cdot \beta$-fache Vielfache von x. *teilt* ist auch antisymmetrisch: Aus $x \,|\, y$ und $y \,|\, x$ folgt, dass x das einfache Vielfache von y (und umgekehrt) sein muss, also $x = y$ gelten muss. Somit ist *teilt* eine Ordnungsrelation. Wie die Belegungen $x \leftarrow 2$ und $y \leftarrow 3$ zeigen, gilt aber *nicht* immer $(x \,|\, y \lor y \,|\, x)$. Die *teilt*-Relation ist somit keine lineare Ordnungsrelation.

Auf $\mathbb{Z}$ folgt allerdings aus $(x \,|\, y \land y \,|\, x)$ nicht notwendigerweise $x = y$, wie die Belegungen $x \leftarrow 2$ und $y \leftarrow -2$ zeigen. Auf $\mathbb{Z}$ ist *teilt* somit keine Ordnungsrelation.

3.7 Funktionen als Mengen

3.7 (Ü.1)

(a) keine Funktion
(b) partielle Funktion
(c) keine Funktion
(d) totale Funktion

3.7 (Ü.3) Es gibt 2^2 totale Funktionen von $\{1,2\}$ nach $\{3,4\}$. Allgemein gibt es m^n totale Funktion von einer Menge mit n Elementen in eine Menge mit m Elementen.

3.7 (Ü.5)

(a) $f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 8,\ f(4) = 16.$
(b) $f(1) = 3,\ f(2) = 5,\ f(3) = 7,\ f(4) = 9.$
(c) $f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 9,\ f(4) = 16.$

3.7 (Ü.7)

(a) weder injektiv noch surjektiv, also nicht bijektiv

(b) injektiv, nicht surjektiv, also nicht bijektiv

(c) surjektiv, nicht injektiv, also nicht bijektiv

(d) injektiv und surjektiv, also bijektiv

3.7 (Ü.9)

(a) total, injektiv, nicht surjektiv, also nicht bijektiv

(b) total, injektiv, nicht surjektiv, also nicht bijektiv

(c) total, injektiv, surjektiv, also bijektiv

(d) total, injektiv, nicht surjektiv, also nicht bijektiv

3.7 (Ü.11) Für eine Menge von Indizes I definieren wir

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \Big\{a \mid \underset{i\in I}{\exists}\ a \in A_i\Big\}$$

3.7 (Ü.13)

Gegeben: a

wobei wobei a eine endliche Folge ist

Gesucht: b

sodass b eine endliche Folge ist, und es gilt $L(a) = L(b) \wedge \underset{1\le k\le L(a)}{\forall} b_k = a_{L(a)-k+1}$

3.7 (Ü.15) istPalindrom(a) $:\Leftrightarrow \underset{1\le k\le L(a)}{\forall} a_k = a_{L(a)-k+1}$

3.7 (Ü.17) istBeschränkt(a) $:\Leftrightarrow \underset{S\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n| \le S$

3.7 (Ü.19)

Gegeben: A

wobei wobei A eine $m \times n$ Matrix ist

Gesucht: x

sodass $x \in \mathbb{R} \wedge x = \max\limits_{1\le k\le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |A_{ik}|$

3.7 (Ü.21) kgV(m, n) := dasjenige k mit $m \mid k \wedge n \mid k \wedge \neg\exists\, j\ j < k \wedge m \mid j \wedge n \mid j$

3.8 Struktur in Mengen

3.8 (Ü.1) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ beliebig aber fix; wir zerlegen die Implikation in einen *wir wissen*- und einen *zu zeigen*-Teil:

wir wissen $a \mid b \wedge a \mid c$

zu zeigen $a \mid (b + c)$

Einsetzen in die Definition der Teilbarkeit liefert

wir wissen $\Big(\underset{r\in Z}{\exists} r \cdot a = b\Big) \wedge \Big(\underset{s\in Z}{\exists} s \cdot a = c\Big)$

zu zeigen $\underset{u\in Z}{\exists} u \cdot a = b + c$

Mit der Variablenbelegung $u \leftarrow r+s$ und Addition der Gleichungen in der *wir wissen*-Zeile erhalten wir

$$\begin{array}{rl} \textit{wir wissen} & \exists_{r\in Z}\exists_{s\in Z} (r+s)\cdot a = b+c \\ \textit{zu zeigen} & (r+s)\cdot a = b+c, \end{array}$$

womit der Beweis abgeschlossen ist.

3.8 (Ü.3) Zu beweisen sei die Aussage

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{1}{2}\Big(3^{n+1}-1\Big)$$

Induktionsbeginn: Wir beginnen bei $n=0$:

$$3^0 = 1 = \frac{1}{2}(3^1-1)\,.$$

Induktionsannahme: Für beliebig aber fixes n gelte

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{1}{2}\Big(3^{n+1}-1\Big)$$

Induktionsschluss: Zu zeigen ist für dieses beliebig aber fixe n:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 3^i = \frac{1}{2}\Big(3^{n+2}-1\Big)$$

$$\begin{array}{rl} \textit{wir wissen} & \displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} 3^i = \Big(\sum_{i=0}^{n} 3^i\Big) + 3^{n+1} = \frac{1}{2}\Big(3^{n+1}-1\Big) + 3^{n+1} = \\ & \displaystyle\frac{1}{2}\Big(3^{n+1}-1+2\cdot 3^{n+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(3\cdot 3^{n+1}-1\Big) = \frac{1}{2}\Big(3^{n+2}-1\Big)\,. \end{array}$$

Das dies identisch zur zu zeigenden Aussage ist, ist der Beweis abgeschlossen.

3.8 (Ü.5) Zu beweisen sei die Aussage

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_0} \Big(\sum_{i=0}^{n} i\Big)^2 = \sum_{i=0}^{n} i^3\,.$$

Induktionsbeginn: Wir beginnen bei $n=0$:

$$0^2 = 0 = 0^3.$$

Induktionsannahme: Für beliebig aber fixes n gelte

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} i\Big)^2 = \sum_{i=0}^{n} i^3\,.$$

Induktionsschluss: Zu zeigen ist für dieses beliebig aber fixe n:

$$\Big(\sum_{i=0}^{n+1} i\Big)^2 = \sum_{i=0}^{n+1} i^3\,.$$

$$
\begin{aligned}
&\textit{wir wissen} && \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \text{das ist Beispiel 3.41} \\
&\textit{wir wissen} && \Big(\sum_{i=0}^{n+1} i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=0}^{n} i + (n+1)\Big)^2 = \\
& && \Big(\sum_{i=0}^{n} i\Big)^2 + 2(n+1)\Big(\sum_{i=0}^{n} i\Big) + (n+1)^2 = \\
& && \Big(\sum_{i=0}^{n} i^3\Big) + 2(n+1)\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = \\
& && \Big(\sum_{i=0}^{n} i^3\Big) + n(n+1)^2 + (n+1)^2 = \\
& && \Big(\sum_{i=0}^{n} i^3\Big) + (n+1)(n+1)^2 = \sum_{i=0}^{n+1} i^3\,.
\end{aligned}
$$

Das dies identisch zur zu zeigenden Aussage ist, ist der Beweis abgeschlossen.

3.8 (Ü.7) Zu beweisen sei die Aussage

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 3 \mid 4n^3 - n$$

Induktionsbeginn: Wir beginnen bei $n = 1$:

$$3 \mid 4 \cdot 1^3 - 1.$$

Induktionsannahme: Für beliebig aber fixes n gelte

$$3 \mid 4n^3 - n.$$

Induktionsschluss: Zu zeigen ist für dieses beliebig aber fixe n:

$$3 \mid 4(n+1)^3 - (n+1).$$

$$
\begin{aligned}
&\textit{zu zeigen} && 3 \mid 4(n+1)^3 - (n+1) \\
&\textit{zu zeigen} && 3 \mid 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n - 1 \\
&\textit{zu zeigen} && 3 \mid 4n^3 + 12n^2 + 11n + 3 \\
&\textit{zu zeigen} && 3 \mid \underbrace{4n^3 - n} + \underbrace{3(4n^2 + 4n + 1)} \\
&\textit{wir wissen} && 3 \mid 4n^3 - n \ \text{ wegen Induktionsannahme} \\
&\textit{wir wissen} && 3 \mid 3(4n^2 + 4n + 1) \ \text{ da Vielfaches von 3} \\
&\textit{wir wissen} && \forall_{a,b,c\in\mathbb{Z}} \Big(a \mid b \wedge a \mid c\Big) \Rightarrow a \mid (b + c)
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$\textit{wir wissen} \quad 3 \mid \underbrace{4n^3 - n} + \underbrace{3(4n^2 + 4n + 1)}\,,$$

womit der Beweis abgeschlossen ist.

3.8 (Ü.9) Zu beweisen sei die Aussage

$$\forall_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq 4}}\ n! > 2^n\,.$$

Induktionsbeginn: Wir beginnen bei $n = 4$:

$$4! = 24 > 2^4 = 16.$$

Induktionsannahme: Für beliebig aber fixes $n \geq 4$ gelte

$$n! > 2^n\,.$$

Induktionsschluss: Zu zeigen ist für dieses beliebig aber fixe n:

$$(n+1)! > 2^{n+1}.$$

$$\textit{wir wissen} \qquad (n+1)! = (n+1)n! > (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}\,.$$

Mit der Transitivität von $>$ ist dies identisch zur zu zeigenden Aussage, womit der Beweis abgeschlossen ist.

3.8 (Ü.11) Zu beweisen sei die Aussage, dass jedes Schachbrett der Größe $2^n \times 2^n$ mit genau einem fehlenden Feld von Trominos überdeckt werden kann.

Induktionsbeginn: Wir beginnen bei $n = 1$. Das Schachbrett hat die Größe 2×2, und für jedes der vier fehlenden Felder kann ein Tromino so rotiert werden, dass genau dieses Feld frei bleibt.

Induktionsannahme: Für beliebig aber fixes n kann jedes Schachbrett der Größe $2^n \times 2^n$ mit genau einem fehlenden Feld von Trominos überdeckt werden.

Induktionsschluss: Zu zeigen ist für dieses beliebig aber fixe n, dass jedes Schachbrett der Größe $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ mit genau einem fehlenden Feld von Trominos überdeckt werden kann. Das Feld der Größe $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ist in jeder Richtung doppelt so groß wie das Feld, für das die Induktionsannahme gilt (also insgesamt viermal so groß). In einem der vier $2^n \times 2^n$ Felder befindet sich das Loch; dieser $2^n \times 2^n$-Teil kann laut Induktionsannahme von Trominos überdeckt werden. In jedes der anderen drei $2^n \times 2^n$-Teile machen wir genau dort ein Loch, wo sich die vier $2^n \times 2^n$-Teile berühren (also in der Mitte des ganzen $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-Feldes). Somit ist die Induktionsannahme auf alle vier $2^n \times 2^n$-Teile. Durch die spezielle Anordnung der neu gemachten drei Löcher können diese mit einem Tromino überdeckt werden, womit der Induktionsschluss bewiesen ist.

3.8 (Ü.13)

$$\operatorname{internals}(T) := \begin{cases} 0 & \text{falls } T = \bullet \\ 1 + \operatorname{internals}(T_1) + \operatorname{internals}(T_2) & \text{falls } T = \begin{array}{c}\bullet\\ \diagup\ \diagdown\\ T_1\quad T_2\end{array} \end{cases}$$

3.8 (Ü.15) Beispiele lassen vermuten, dass die Zahl $i(T)$ der inneren Knoten eines Binärbaums T immer um eins weniger ist als die Zahl $b(T)$ der Blätter dieses Baums, also $i(T) + 1 = b(T)$. Wir beweisen diese Vermutung mit struktureller Induktion, benötigen dazu aber die Lösung von Übungsaufgabe **3.8 (Ü.14)**. Wir schreiben b statt leaves für die Anzahl der Blätter:

$$b(T) := \begin{cases} 1 & \text{falls } T = \bullet \\ b(T_1) + b(T_2) & \text{falls } T = \begin{array}{c}\bullet\\ \diagup\ \diagdown\\ T_1\quad T_2\end{array} \end{cases}$$

Induktionsbeginn: $i(\bullet) + 1 = 0 + 1 = b(\bullet)$

Induktionsannahme: Für beliebig aber fixen Binärbäume T_1 und T_2 gelten $i(T_1)+1 = b(T_1)$ und $i(T_2) + 1 = b(T_2)$.

Induktionsschluss: Zu zeigen ist für diese beliebig aber fixen Binärbäume T_1 und T_2, dass $i\left(\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ T_1 & & T_2 \end{array}\right) + 1 = b\left(\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ T_1 & & T_2 \end{array}\right)$ ist.

$$\textit{wir wissen} \qquad i\left(\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ T_1 & & T_2 \end{array}\right) = 1 + i(T_1) + i(T_2)$$

$$\textit{wir wissen} \qquad b\left(\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ T_1 & & T_2 \end{array}\right) = b(T_1) + b(T_2)$$

Mit der Induktionsannahme gilt

$$\begin{aligned} \textit{wir wissen} \qquad i\left(\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ T_1 & & T_2 \end{array}\right) &= 1 + (b(T_1) - 1) + (b(T_2) - 1) \\ &= b(T_1) + b(T_2) - 1 \\ &= b\left(\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ T_1 & & T_2 \end{array}\right) - 1, \end{aligned}$$

woraus sofort die zu zeigende Aussage folgt.

3.8 (Ü.17) Wir definieren für Zeichenketten α und β die Konkatenation $\alpha \circ \beta$ rekursiv als

$$\alpha \circ \beta := \begin{cases} \beta & \text{falls } \alpha = \varepsilon \\ x \cdot (\gamma \circ \beta) & \text{falls } \alpha = x \cdot \gamma \end{cases}$$

3.8 (Ü.19) Wir benötigen dazu die Definition der Funktion *length* von Zeichenketten:

$$\text{length}(\alpha) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha = \varepsilon \\ 1 + \text{length}(\gamma) & \text{falls } \alpha = x \cdot \gamma \end{cases}$$

Sei β eine beliebig aber fixe Zeichenkette. Wir beweisen $\text{length}(\alpha \circ \beta) = \text{length}(\alpha) + \text{length}(\beta)$ durch strukturelle Induktion über α:

Induktionsbeginn: Für $\alpha = \varepsilon$ ist zu zeigen:

$$\text{length}(\varepsilon \circ \beta) = \text{length}(\varepsilon) + \text{length}(\beta).$$

Dies gilt wegen $\varepsilon \circ \beta = \beta$ und $\text{length}(\varepsilon) = 0$.

Induktionsannahme: Für beliebig aber fixes α gilt $\text{length}(\alpha \circ \beta) = \text{length}(\alpha) + \text{length}(\beta)$.

Induktionsschluss: Zu zeigen ist für dieses beliebig aber fixe α, dass die Aussage auch für $x \cdot \alpha$ gilt:

$$\begin{aligned} \textit{zu zeigen} \qquad \text{length}((x \cdot \alpha) \circ \beta) &= \text{length}(x \cdot \alpha) + \text{length}(\beta) \\ \textit{wir wissen} \qquad \text{length}((x \cdot \alpha) \circ \beta) &= \text{length}(x \cdot (\alpha \circ \beta)) \\ &= 1 + \text{length}(\alpha \circ \beta) \\ &= 1 + \text{length}(\alpha) + \text{length}(\beta) \\ &= \text{length}(x \cdot \alpha) + \text{length}(\beta). \end{aligned}$$

3.9 Endliche und unendliche Mengen

3.9 (Ü.1) Eine mögliche Funktion ist die *logistische Funktion*

$$f(x) = 1/(1 + e^{-x}).$$

3.9 (Ü.3) Seien $f : \mathbb{N} \to A$ und $g : \mathbb{N} \to B$ die beiden Bijektionen, deren Existenz durch die Abzählbarkeit der Mengen A und B gegeben sind. Dann ist eine mögliche Bijektion $h : \mathbb{N} \to A \cup B$ gegeben durch

$$h(n) := \begin{cases} f((n+1)/2) & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \\ g(n/2) & \text{falls } n \text{ gerade ist} \end{cases}$$

Die Funktion h zählt somit alternierend Elemente von A und B durch (in der Reihenfolge, die durch f und g vorgegeben ist), beginnend mit dem ersten Element von A.

3.9 (Ü.5) Jeder unendlichen Folge $d_1 d_2 d_3 \ldots$ von Nullen und Einsen entspricht eindeutig eine Binärzahl $0.d_1 d_2 d_3 \ldots$, und jede solche Binärzahl ist die Binärdarstellung genau einer reellen Zahl im offenen Einheitsintervall. Für einen echten Beweis müsste man noch darauf eingehen, dass diese Darstellung nicht eindeutig ist, dazu fehlen uns aber die Mittel. Als Beispiel gilt im Binärformat etwa $0.011111111111\ldots = 0.100000\ldots$; im Dezimalformat etwa $0.499999999\ldots = 0.5000\ldots$.

3.9 (Ü.7) Mit Übungsaufgabe **3.9 (Ü.6)** ist $\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ gleichmächtig mit allen unendlichen 0-1 Folgen, mit Übungsaufgabe **3.9 (Ü.5)** sind die unendlichen 0-1 Folgen gleichmächtig mit dem offenen Einheitsintervall, und mit Übungsaufgabe **3.9 (Ü.1)** ist das offene Einheitsintervall gleichmächtig mit ganz $\mathbb{R}$. Da die Relation *gleichmächtig* transitiv ist – siehe Übungsaufgabe **3.9 (Ü.9)** – ist damit $\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ gleichmächtig mit $\mathbb{R}$.

3.9 (Ü.9) Zwei Mengen A und B sind gleichmächtig, wenn es eine bijektive Funktion $f : A \to B$ gibt. Die Identitätsfunktion ist eine solche Bijektion, deswegen ist jede Menge gleichmächtig zu sich selbst, und *gleichmächtig* ist reflexiv. Da f bijektiv ist, ist auch $f^{-1} : B \to A$ eine Bijektion. Somit ist *gleichmächtig* auch symmetrisch. Wenn es Bijektionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gibt, dann ist auch $g \circ f : A \to C$ eine Bijektion; somit ist *gleichmächtig* auch transitiv.

4 | Mengen + Operationen = Algebraische Strukturen

4.1 Gruppen

4.1 (Ü.1)

(a) $\{(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3)\}$

(b) $\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,1)\}$

4.1 (Ü.3)

(a) Beispiele für Assoziativität sind etwa

$$(a \circ b) \circ c = d \circ c = d; a \circ (b \circ c) = a \circ b = d$$
$$(d \circ d) \circ a = a \circ a = c; d \circ (d \circ a) = d \circ b = c$$
$$(b \circ c) \circ d = b \circ d = c; b \circ (c \circ d) = b \circ d = c$$

Die Verknüpfungstabelle ist kommutativ, da sie symmetrisch um die Diagonale ist. Das neutrale Element ist c, und die Inversen sind $a^{-1} = a$, $b^{-1} = d$, $c^{-1} = c$ und $d^{-1} = b$.

(b) Diese Verknüpfungstabelle ist nicht assoziativ, wie dieses Gegenbeispiel zeigt:

$$(a \circ b) \circ c = b \circ c = d; a \circ (b \circ c) = a \circ d = c\,.$$

Die Verknüpfungstabelle ist kommutativ, da sie symmetrisch um die Diagonale ist. Es gibt kein neutrales Element, und damit auch keine Inversen.

(c) Beispiele für Assoziativität sind etwa

$$(a \circ b) \circ c = c \circ c = a; a \circ (b \circ c) = a \circ b = c$$
$$(c \circ b) \circ c = b \circ c = b; c \circ (b \circ c) = c \circ b = b$$
$$(a \circ c) \circ b = a \circ b = c; a \circ (c \circ b) = a \circ b = c$$

Die Verknüpfungstabelle ist kommutativ, da sie symmetrisch um die Diagonale ist. Das neutrale Element ist c, und die Inversen sind $a^{-1} = b$, $b^{-1} = a$ und $c^{-1} = c$.

4.1 (Ü.5)

Induktionsbeginn: $(a^1)^{-1} = a^{-1} = (a^{-1})^1$

Induktionsannahme: Für beliebig aber fixes n gilt $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.

Induktionsschluss: Zu zeigen ist für dieses beliebig aber fixe n, dass $(a^{n+1})^{-1} = (a^{-1})^{n+1}$ gilt. Wir verwenden in der folgenden Umformung, dass $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ gilt:

$$\textit{wir wissen} \qquad (a^{n+1})^{-1} = (a^n \circ a)^{-1} = a^{-1} \circ (a^n)^{-1} = a^{-1} \circ (a^{-1})^n$$
$$= (a^{-1})^{n+1}.$$

4.1 (Ü.7)

(a) kommutativ, assoziativ, neutrales Element (0), nicht alle inversen Elemente (die Zahl 1 besitzt keines)

(b) nicht kommutativ, nicht assoziativ, kein neutrales Element, und daher auch keine inversen Elemente

(c) kommutativ, assoziativ, kein neutrales Element ($1/5 \notin \mathbb{Z}$), daher auch keine inversen Elemente

(d) nicht kommutativ, nicht assoziativ, kein neutrales Element, und daher auch keine inversen Elemente

4.1 (Ü.9) $[\mathrm{Pot}(M), \cap]$ ist kommutativ, assoziativ, besitzt ein neutrales Element (M selbst), aber keine inversen Elemente. Ebenso ist $[\mathrm{Pot}(M), \cup]$ kommutativ, assoziativ, besitzt ein neutrales Element (die leere Menge), aber keine inversen Elemente.

4.1 (Ü.11) Da die Hintereinanderausführung von Funktionen assoziativ ist, ist es auch die Symmetriegruppe des Quadrats. Diese Gruppe ist nicht kommutativ, das neutrale Element ist die Identitätsfunktion id, und die Inversen sind wie folgt: $\mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$, $r_{90}^{-1} = r_{270}$, $r_{180}^{-1} = r_{180}$, $r_{270}^{-1} = r_{90}$, $s_h^{-1} = s_h$, $s_v^{-1} = s_v$, $s_{d1}^{-1} = s_{d1}$, $s_{d2}^{-1} = s_{d2}$.

4.1 (Ü.13)

(a) $x = [1]_5$

(b) $x = [5]_7$

4.1 (Ü.15)

(a) ja

(b) nein

(c) ja

(d) ja

4.2 Isomorphismen

4.2 (Ü.1) Jede Gruppe/jeder Graph ist isomorph zu sich selbst (die in der Definition geforderte Bijektion ist die Identitätsfunktion), daher ist die Relation *istIsomorphZu* reflexiv. Ebenso ist sie assoziativ: Wenn eine Struktur G_1 isomorph zu G_2 ist, so existiert eine strukturerhaltende Bijektion f zwischen G_1 und G_2, und damit natürlich auch eine Bijektion von G_2 zu G_1 (nämlich f^{-1}). Die Relation *istIsomorphZu* ist auch transitiv: Zu strukturerhaltenden Bijektionen $f : G_1 \to G_2$ und $g : G_2 \to G_3$ existiert $g \circ f : G_1 \to G_3$, die wiederum eine Bijektion ist.

Die Eigenschaft der Strukturerhaltung muss separat für Graphen und Gruppen überprüft werden; hier nur für Graphen. Wir beweisen im Folgenden

$$\Big(\mathrm{isomorph}([V_1, E_1], [V_2, E_2]) \wedge \mathrm{isomorph}([V_2, E_2], [V_3, E_3])\Big) \\ \Rightarrow \mathrm{isomorph}([V_1, E_1], [V_3, E_3])$$

Zerlegen der Implikation liefert

wir wissen	$\mathrm{isomorph}([V_1, E_1], [V_2, E_2]) \wedge \mathrm{isomorph}([V_2, E_2], [V_3, E_3])$
zu zeigen	$\mathrm{isomorph}([V_1, E_1], [V_3, E_3])$

Einsetzen in die Definition des Graphenisomorphmus liefert

wir wissen $\quad \underset{f:V_1\to V_2}{\exists} \ \underset{v,w\in V_1}{\forall} (v,w) \in E_1 \Leftrightarrow (f(v), f(w)) \in E_2$

wir wissen $\quad \underset{g:V_2\to V_3}{\exists} \ \underset{a,b\in V_2}{\forall} (a,b) \in E_2 \Leftrightarrow (g(a), g(b)) \in E_3$

zu zeigen $\quad \underset{h:V_1\to V_3}{\exists} \ \underset{v,w\in V_1}{\forall} (v,w) \in E_1 \Leftrightarrow (h(a), h(b)) \in E_3$

Die zweite *wir wissen*-Zeile gilt für alle $(a,b) \in E_2$, deswegen auch speziell für $(f(v), f(w))$ aus der ersten *wir wissen*-Zeile:

wir wissen $\quad \underset{f:V_1\to V_2}{\exists} \ \underset{v,w\in V_1}{\forall} (v,w) \in E_1 \Leftrightarrow (f(v), f(w)) \in E_2$

wir wissen $\quad \underset{g:V_2\to V_3}{\exists} \ \underset{f(v),f(w)\in V_2}{\forall} (f(v), f(w)) \in E_2 \Leftrightarrow (g(f(v)), g(f(w))) \in E_3$

Daraus folgt

wir wissen $\quad \underset{g\circ f:V_1\to V_3}{\exists} \ \underset{v,w\in V_1}{\forall} (v,w) \in E_1 \Leftrightarrow (g(f(v)), g(f(w)) \in E_3$

Das in der *zu zeigen*-Zeile gesuchte h ist somit $g \circ f$. Der Beweis für die Transitivität der Isomorphismus-Beziehung für Gruppen ist ähnlich.

4.2 (Ü.3) Die Gradsequenz des ersten, dritten und vierten Graphen ist

$$\big((0,1), (1,1), (1,2), (2,1), (2,1)\big),$$

diese sind somit möglicherweise isomorph. Der zweite Graph besitzt als einziger einen Pfeil in beide Richtungen, und kann somit nicht isomorph zu einem der anderen Graphen sein. Der erste und dritte Graph sind über die Zuordnung $1 \to 4$, $2 \to 3$, $3 \to 5$, $4 \to 2$ und $5 \to 1$ isomorph. Der erste und vierte (und somit auch der dritte und vierte) sind *nicht* isomorph, da keine der möglichen Bijektionen zwischen den Knoten auch die Kanten erhält.

4.2 (Ü.5)

$$[G_1, \circ_1] = \begin{array}{c|cccc} \circ_1 & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & c & d & a & b \\ d & d & c & b & a \end{array} \qquad [G_2, \circ_2] = \begin{array}{c|cccc} \circ_2 & e & f & g & h \\ \hline e & e & f & g & h \\ f & f & h & e & g \\ g & g & e & h & f \\ h & h & g & f & e \end{array}$$

Diese beiden Gruppen sind nicht isomorph, da in $[G_1, \circ_1]$ jedes Element zu sich selbst invers ist, in $[G_2, \circ_2]$ aber nur e und h.

4.2 (Ü.7)

$[\mathbb{Z}_4, +]$

$+$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$
$[0]_4$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$
$[1]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$	$[0]_4$
$[2]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$	$[0]_4$	$[1]_4$
$[3]_4$	$[3]_4$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$

$[\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]_5\}, \cdot]$

$\circ$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[1]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[2]_5$	$[2]_5$	$[4]_5$	$[1]_5$	$[3]_5$
$[3]_5$	$[3]_5$	$[1]_5$	$[4]_5$	$[2]_5$
$[4]_5$	$[4]_5$	$[3]_5$	$[2]_5$	$[1]_5$

Die gesuchte Bijektion ist $[0]_4 \to [1]_5$, $[1]_4 \to [2]_5$, $[2]_4 \to [4]_5$, $[3]_4 \to [3]_5$.

4.2 (Ü.9) Sei $a \in G_1$ beliebig aber fix.

zu zeigen $\quad f(a)^{-1} = f(a^{-1})$

wir wissen $\quad f(a \circ_1 a^{-1}) = f(a) \circ_2 f(a^{-1})$

wir wissen $\quad f(a \circ_1 a^{-1}) = f(e_1) = e_2 = f(a) \circ_2 f(a)^{-1}$

wir wissen $\quad f(a) \circ_2 f(a^{-1}) = f(a) \circ_2 f(a)^{-1}$,

woraus die zu zeigende Aussage folgt.

4.3 Ringe und Körper

4.3 (Ü.1) $[\mathrm{Pot}(M), \triangle]$ ist kommutativ, assoziativ, besitzt ein neutrales Element (die leere Menge) sowie alle inversen Elemente ($A^{-1} = A$). Somit ist $[\mathrm{Pot}(M), \triangle]$ eine kommutative Gruppe. Weiters ist $[\mathrm{Pot}(M), \cap]$ assoziativ, kommutativ,besitzt ein neutrales Element (die Menge M), und es gilt

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C),$$

wovon man sich mit einem Venn-Diagramm überzeugen kann. Da $\cap$ kommutativ ist, muss man die zweite Distributivitätsbedingung nicht mehr überprüfen.

4.3 (Ü.3) Die algebraische Struktur $[\{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}, +]$ ist kommutativ wegen

$$(x_1 + \sqrt{2}y_1) + (x_2 + \sqrt{2}y_2) = (x_2 + \sqrt{2}y_2) + (x_1 + \sqrt{2}y_1),$$

assoziativ wegen

$$\Big((x_1 + \sqrt{2}y_1) + (x_2 + \sqrt{2}y_2)\Big) + (x_3 + \sqrt{2}y_3) = (x_1 + \sqrt{2}y_1) + \Big((x_2 + \sqrt{2}y_2) + (x_3 + \sqrt{2}y_3)\Big),$$

besitzt das neutrale Element $0 + \sqrt{2}\,0$. Für die inversen Elemente gilt

$$-(x + \sqrt{2}y) = -x - \sqrt{2}y.$$

Weiters ist $[\{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}, \cdot]$ kommutativ wegen

$$(x_1 + \sqrt{2}y_1) \cdot (x_2 + \sqrt{2}y_2) = (x_2 + \sqrt{2}y_2) \cdot (x_1 + \sqrt{2}y_1),$$

assoziativ wegen

$$\Big((x_1 + \sqrt{2}y_1) \cdot (x_2 + \sqrt{2}y_2)\Big) \cdot (x_3 + \sqrt{2}y_3) = (x_1 + \sqrt{2}y_1) \cdot \Big((x_2 + \sqrt{2}y_2) \cdot (x_3 + \sqrt{2}y_3)\Big)$$

und besitzt das neutrale Element $1 + \sqrt{2}\,0$. Für die Distributivität muss gelten

$$(x_1 + \sqrt{2}y_1) \cdot \Big((x_2 + \sqrt{2}y_2) + (x_3 + \sqrt{2}y_3)\Big) = \Big((x_1 + \sqrt{2}y_1) \cdot (x_2 + \sqrt{2}y_2)\Big) + \Big((x_1 + \sqrt{2}y_1) \cdot (x_3 + \sqrt{2}y_3)\Big).$$

Dies kann man durch Ausmultiplizieren nachprüfen, oder über einen Verweis auf die Distributivität der Multiplikation über die Addition in den reellen Zahlen argumentieren.

4.3 (Ü.5)

(a) $x = [3]_5$

(b) $x = [3]_7$

4.4 Komplexe Zahlen

4.4 (Ü.1) Für die komponentenweise definierte Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ bildet $[\mathbb{R}^2, +]$ eine kommutative Gruppe. Die Struktur $[\mathbb{R}^2, \cdot]$ ist kommutativ, assoziativ, und besitzt das neutrale Element $(1, 1)$. Für einen Körper darf aber das einzige Element ohne multiplikatives Inverses das neutrale Element der Addition sein, also $(0, 0)$. Da aber die inversen Elemente über

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

gebildet werden müssen, gibt es auch für $(3, 0)$ oder $(0, -\pi)$ keine multiplikativen Inversen.

4.4 (Ü.3) Für das neutrale Element $e_1 + i\,e_2$ muss für alle komplexen Zahlen $a + i\,b$ gelten:

$$(a + i\,b) \cdot (e_1 + i\,e_2) = (a + i\,b).$$

Ausmultiplizieren der linken Seite liefert die Gleichung

$$(ae_1 + i\,be_1 + i\,ae_2 + i^2\,be_2) = a + i\,b$$

und daraus

$$ae_1 - be_2 + i\,(be_1 + ae_2) = a + i\,b.$$

Da zwei komplexe Zahlen gleich sind, wenn ihre Real- und Imaginärteile gleich sind, erhalten wir daraus die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} ae_1 - be_2 &= a \\ be_1 + ae_2 &= b. \end{aligned}$$

Addieren der b-fachen ersten zur a-fachen zweiten Gleichung liefert

$$e_1(a^2 + b^2) = a^2 + b^2,$$

woraus $e_1 = 1$ und in weiterer Folge auch $e_2 = 0$ folgen.

4.4 (Ü.5)

$$\frac{(c + i\,d)(a - i\,b)}{(a + i\,b)(a - i\,b)} = \frac{(c + i\,d)(a - i\,b)}{(a^2 + i\,ba - i\,ab + i^2 b^2)} = \frac{(c + i\,d)(a - i\,b)}{(a^2 - b^2)}.$$

4.4 (Ü.7) Zu zeigen ist

$$\Big(r_1(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1)\Big) \cdot \Big(r_2(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2)\Big) = \\ r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,.$$

Termumformung der linken Seite liefert

$$\Big(r_1(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_2)\Big) \cdot \Big(r_2(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2)\Big) = \\ r_1 r_2\Big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\Big)$$

Die zu zeigende Gleichung folgt dann durch Anwenden folgender trigonometrischer Identitäten:

wir wissen $\quad \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi = \sin(\theta + \varphi)$

wir wissen $\quad \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi = \cos(\theta + \varphi).$

4.4 (Ü.9)

$$\left[4, \frac{2\pi}{5}\right] = 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\,4\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1.236 - 3.804i\,.$$

$$\left[5, -\frac{\pi}{6}\right] = 5\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,5\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4.33 - 2.5i\,.$$

4.4 (Ü.11)

(a) $z = \left[\frac{1}{4^3 3^2}, -\frac{35\pi}{12}\right]$

(b) $z = \left[2, \frac{37\pi}{6}\right]$

4.4 (Ü.13)

(a) Einsetzen in die Lösungsformel für quadratische Gleichungen (gilt auch für komplexe Koeffizienten!) liefert

$$z_1 = \frac{1}{2}\Big(-3 + \sqrt{9 + 4\,i}\Big), \quad z_2 = \frac{1}{2}\Big(-3 - \sqrt{9 + 4\,i}\Big).$$

Umwandeln von $9 + 4\,i$ in Polarkoordinaten und anschließendes Wurzelziehen liefert $\sqrt{9 + 4\,i} = 3.069 + 0.651\,i$, und damit die Lösungen

$$z_1 = 0.035 + 0.326\,i, \quad z_2 = -3.035 - 0.326\,i\,.$$

(b) Einsetzen in die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert

$$z_1 = \frac{1}{2}\Big(-3 + i + \sqrt{-8+2\,i}\Big), \quad z_2 = \frac{1}{2}\Big(-3 + i - \sqrt{-8+2\,i}\Big),$$

mit $\sqrt{-8+2\,i} = 0.35 + 2.85\,i$ erhält man

$$z_1 = -1.32 + 1.925\,i, \quad z_2 = -1.675 - 0.925\,i.$$

4.5 Polynome

4.5 (Ü.1)

(a) $P = (x+1) \cdot Q - 7x - 3$

(b) $P = (x^2 + 3x - 3) \cdot Q + 4x$

4.5 (Ü.3) Dividieren von $P(x)$ durch $(x-1)(x-2)(x+3)$ liefert $x^2 + 3x - 7$ mit den Nullstellen $\xi_4 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}$ und $\xi_5 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2}$.

4.5 (Ü.5) Wenn $\xi_1 = i$ eine Nullstelle einer reellen Polynomfunktion ist, dann ist auch $\xi_3 = -i$ eine Nullstelle, und $P(x)$ kann ohne Rest durch $(x-i)(x+i) = (x^2+1)$ und auch, wie angegeben durch $(x-2)$ dividiert werden. Dies liefert $x^2 - 2x - 3$ mit den weiteren Nullstellen $\xi_4 = 3$ und $\xi_5 = -1$.

5 | Lineare Algebra

5.1 Vektorräume

5.1 (Ü.1) $3v = (-3, 6, 0, -6)$, $-2v + 3w = (8, -1, -9, 7)$
5.1 (Ü.3) $0v + 0w = (0, 0)$, $1v + 0w = (-2, 3)$, $2v - 3w = (-10, 3)$, $-v + 2w = (6, -1)$
5.1 (Ü.5) Zu zeigen ist für eine lineare Hülle L:

$$\underset{u,w \in L}{\forall} u + w \in L$$
$$\underset{u \in L, \lambda \in \mathbb{R}}{\forall} \lambda u \in L$$

Seien also u, w, λ beliebig aber fix; mit der Definition der linearen Hülle $L(v_1, \ldots, v_n)$ einer Menge von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ erhalten wir nach Auflösen der Implikationen in den zu zeigenden Aussagen:

$$\begin{aligned}
\textit{wir wissen} \quad & L(v_1, \ldots, v_n) = \left\{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\right\} \\
\textit{wir wissen} \quad & u, w \in L \\
\textit{wir wissen} \quad & \lambda \in \mathbb{R} \\
\textit{zu zeigen} \quad & u + w \in L \\
\textit{zu zeigen} \quad & \lambda u \in L
\end{aligned}$$

Wir verwenden die charakterisierende Eigenschaft einer linearen Hülle und schreiben um:

$$\begin{aligned}
\textit{wir wissen} \quad & \underset{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\exists} u = \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n \\
\textit{wir wissen} \quad & \underset{\beta_1, \ldots, \beta_n}{\exists} w = \beta_1 v_1 + \ldots \beta_n v_n \\
\textit{wir wissen} \quad & \lambda \in \mathbb{R} \\
\textit{zu zeigen} \quad & \underset{\gamma_1, \ldots, \gamma_n}{\exists} u + w = \gamma_1 v_1 + \ldots \gamma_n v_n \\
\textit{zu zeigen} \quad & \underset{\delta_1, \ldots, \delta_n}{\exists} \lambda u = \delta_1 v_1 + \ldots \delta_n v_n
\end{aligned}$$

Addieren der ersten beiden *wir wissen*-Zeilen, sowie Multiplikation der ersten Zeile mit λ liefert

$$\begin{aligned}
\textit{wir wissen} \quad & \underset{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\exists} \underset{\beta_1, \ldots, \beta_n}{\exists} u + w = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \ldots (\alpha_n + \beta_n) v_n \\
\textit{wir wissen} \quad & \underset{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\exists} \lambda u = \lambda \alpha_1 v_1 + \ldots \lambda \alpha_n v_n \\
\textit{zu zeigen} \quad & \underset{\gamma_1, \ldots, \gamma_n}{\exists} u + w = \gamma_1 v_1 + \ldots \gamma_n v_n \\
\textit{zu zeigen} \quad & \underset{\delta_1, \ldots, \delta_n}{\exists} \lambda u = \delta_1 v_1 + \ldots \delta_n v_n
\end{aligned}$$

Aus diesen Umformungen kann man erkennen, dass die in den *zu zeigen*-Zeilen geforderten skalaren Faktoren gegeben sind durch $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$ sowie $\delta_i = \lambda\alpha_i$.

5.1 (Ü.7)

(a) Zu zeigen ist, dass die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -3x + y = 0 \right\}$$

einen Unterraum bildet. Seien dazu also $v = (v_1, v_2)$ und $w = (w_1, w_2)$ beliebig aber fixe Vektoren in U; das bedeutet, dass sie die charakterisierende Eigenschaft von U erfüllen:

$$\begin{aligned} &\textit{wir wissen} && -3v_1 + v_2 = 0 \\ &\textit{wir wissen} && -3w_1 + w_2 = 0 \end{aligned}$$

Zu zeigen ist, dass dann ihre Summe $v+w$ bzw. skalares Vielfaches λv wieder in U liegt. Mit beliebig aber fixem $\lambda \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\textit{zu zeigen} && -3(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) = 0 \\ &\textit{zu zeigen} && -3(\lambda v_1) + \lambda v_2 = 0 \end{aligned}$$

Die erste *zu zeigen*-Zeile erhalten wir durch Addition der beiden *wir wissen*-Zeilen; die zweite *zu zeigen*-Zeile erhalten wir durch Multiplikation der ersten *wir wissen*-Zeile mit λ.

(b) Zu zeigen ist, dass die Menge

$$V = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

einen Unterraum bildet. Seien dazu also u und w beliebig aber fixe Vektoren in V; das bedeutet, dass sie die charakterisierende Eigenschaft von V erfüllen:

$$\begin{aligned} &\textit{wir wissen} && \underset{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}{\exists}\, u = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\textit{wir wissen} && \underset{\gamma,\delta \in \mathbb{R}}{\exists}\, w = \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir argumentieren nun wie in Teil **(a)**: Zu zeigen ist, dass dann ihre Summe $u+w$ bzw. skalares Vielfaches λu wieder in V liegt. Mit beliebig aber fixem $\lambda \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\textit{zu zeigen} && \underset{\mu,\nu \in \mathbb{R}}{\exists}\, u + w = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\textit{zu zeigen} && \underset{\tau,\rho \in \mathbb{R}}{\exists}\, \lambda u = \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir addieren die *wir wissen*-Zeilen, bzw. Multiplizieren die erste Zeile mit λ:

$$\begin{aligned} &\textit{wir wissen} && \underset{\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}}{\exists}\, u + w = (\alpha + \gamma) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (\beta + \delta) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\textit{wir wissen} && \underset{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}{\exists}\, \lambda u = \lambda\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass mit den Belegungen $\mu \leftarrow (\alpha+\gamma)$, $\nu \leftarrow (\beta+\delta)$, $\tau \leftarrow \lambda\alpha$ und $\rho \leftarrow \lambda\beta$ die *wir wissen*- und *zu zeigen*-Zeilen identisch gemacht werden können.

5.1 (Ü.9)

(a) linear unabhängig

(b) linear abhängig

(c) linear unabhängig

(d) linear abhängig (der dritte Vektor ist (-2)mal der erste plus dreimal der zweite)

5.1 (Ü.11) Das Polynom x^2 ist kein lineares Vielfaches von $x+1$, somit sind diese beiden Polynome linear unabhängig. Wir rechnen nach, dass $x^2 - x$ nicht in der linearen Hülle der ersten beiden Polynome liegt, alle drei also linear unabhängig sind. Wir nehmen dazu an, das sie linear abhängig sind, und generieren daraus einen Widerspruch. Wenn die drei Polynome linear abhängig sind, dann ist der dritte in der lineare Hülle der ersten beiden, es existieren somit Skalare λ und μ, sodass gilt

$$\lambda x^2 + \mu(x+1) = x^2 - x\,.$$

Zwei Polynome sind gleich, wenn alle Koeffizienten gleich sind. Das bedeutet für obige Gleichung:

wir wissen $\quad \lambda = 1$

wir wissen $\quad \mu = -1$

wir wissen $\quad \mu = 0$

Die letzten beiden Zeilen ergeben den gewünschten Widerspruch, die drei Vektoren sind somit linear unabhängig.

5.1 (Ü.13) Wir wollen beweisen dass u, $u+v$ und $u+v+w$ linear unabhängig sind, wenn schon u, v und w linear unabhängig sind. Das bedeutet über die Definition der linearen Ünabhängigkeit:

wir wissen $\quad \underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}}{\forall} \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

zu zeigen $\quad \underset{\mu_1,\mu_2,\mu_3\in\mathbb{R}}{\forall} \mu_1 u + \mu_2(u+v) + \mu_3(u+v+w) = 0$

$$\Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$$

Seien somit μ_1, μ_2, μ_3 beliebig aber fix; nach Auflösen der Implikation erhalten wir

wir wissen $\quad \underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}}{\forall} \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

wir wissen $\quad \mu_1 u + \mu_2(u+v) + \mu_3(u+v+w) = 0$

zu zeigen $\quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$

Wir formen die zweite *wir wissen*-Zeile um und erhalten

wir wissen $\quad (\mu_1+\mu_2+\mu_3)u + (\mu_2+\mu_3)v + \mu_3 w = 0$

Da die Allaussage

wir wissen $\quad \underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}}{\forall} \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

für *jede* Belegung von λ_1, λ_2 und λ_3 wahr ist, ist sie speziell für $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, $\lambda_2 = \mu_2 + \mu_3$ und $\lambda_3 = \mu_3$ wahr:

wir wissen $\quad (\mu_1+\mu_2+\mu_3)u + (\mu_2+\mu_3)v + \mu_3 w = 0$

$$\Rightarrow (\mu_1+\mu_2+\mu_3) = (\mu_2+\mu_3) = \mu_3 = 0. \qquad .$$

Da wir wissen, dass die linke Seite dieser Implikation wahr ist, können wir mit modus ponens schlussfolgern, dass die rechte Seite gilt:

$$\textit{wir wissen} \qquad (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = (\mu_2 + \mu_3) = \mu_3 = 0.$$

Damit wissen wir, wie gefordert, $\mu_3 = 0$, woraus dann sowohl $\mu_2 = 0$ und in weiterer Folge auch $\mu_3 = 0$ folgen.

5.1 (Ü.15) Wir wissen, dass der Vektorraum V n-dimensional ist, und dass $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind. Zu zeigen ist, dass sich jeder Vektor in V als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ schreiben lässt:

$$\textit{zu zeigen} \qquad \underset{w \in V}{\forall} \; \underset{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}{\exists} w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Sei also $w \in V$ beliebig aber fix. Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass es einen Vektor u gibt, der sich *nicht* als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ schreiben lässt. Damit ist u auch nicht in der linearen Hülle dieser Vektoren, und es gibt $n+1$ linear unabhängige Vektoren. Dies ist ein Widerspruch zur Aussage von Übungsaufgabe **5.1 (Ü.12)**, wonach in einem n-dimensionalen Vektorraum maximal n Vektoren linear unabhängig sind.

5.1 (Ü.17) Wir nehmen für einen Widerspruchsbeweis an, dass ein Vektor v zwei unterschiedliche Koordinaten bezüglich einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ haben kann, es also zwei unterschiedliche Möglichkeiten gibt, v als Linearkombination von $b_1, \ldots, b_n$ zu schreiben:

$$\textit{wir wissen} \qquad \underset{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}{\exists} v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$$

$$\textit{wir wissen} \qquad \underset{\mu_1, \ldots, \mu_n}{\exists} v = \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_n b_n$$

$$\textit{wir wissen} \qquad \underset{1 \leq k \leq n}{\exists} \mu_k \neq \lambda_k$$

Durch Subtrahieren der beiden ersten Zeilen erhalten wir

$$\textit{wir wissen} \qquad \underset{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}{\exists} \; \underset{\mu_1, \ldots, \mu_n}{\exists} 0 = (\lambda_1 - \mu_1) b_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) b_n$$

Da die Basisvektoren linear unabhängig sind, kann jede ihrer Linearkombinationen nur dann 0 ergeben, wenn alle Koeffizienten null sind. Dies ist im Widerspruch zu unserer Annahme $\mu_k \neq \lambda_k$, womit ja zumindest einer der Koeffizienten nicht null wäre.

5.2 Lineare Funktionen

5.2 (Ü.1)

$$\textit{wir wissen} \qquad \underset{v \in V, \lambda \in \mathbb{R}}{\forall} f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

Speziell für $\lambda = 0$ erhalten wir daraus wie gefordert $f(0v) = 0f(v)$, also $f(0) = 0$.

5.2 (Ü.3) Für eine beliebige Funktion f, definiert als

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

ist zu zeigen, dass sie linear ist, dass also gilt:

$$f\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Big) = f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Wir formen im Folgenden die linke Seite zur rechten Seite um:

$$\begin{aligned}
f\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\Big) &= (x_1+y_1)\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + (x_n+y_n)\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \\
&= y_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + y_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \\
&= f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Der Beweis für die Bedingung $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ verläuft analog.

5.2 (Ü.5)

(a) keine lineare Funktion (wegen $+3$)

(b) lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

(c) keine lineare Funktion (wegen $\frac{4y}{x}$)

5.2 (Ü.7)

(a) $f\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -3f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -15 \end{pmatrix}$

(b) $f\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix}$

(c) $f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

All diese Berechnungen sind nur möglich, da die Argumente von f Vielfache des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind. Dies ist beim Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nicht der Fall, sodass die zur Berechnung von $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nötigen Informationen fehlen.

5.2 (Ü.9)

(a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 7y \\ 3x + 6y \end{pmatrix}$

(b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 3y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$

5.2 (Ü.11)

(a) ja (lässt sich über einen Widerspruchsbeweis argumentieren)

(b) nein, z.B. $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

5.3 Matrizendarstellung linearer Funktionen

5.3 (Ü.1) Die Definition der Matrizenmultiplikation für zwei $n \times n$-Matrizen A und B lautet

$$(A \cdot B)_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Angewandt auf die Einheitsmatrix I_n erhalten wir

$$(A \cdot I_n)_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (I_n)_{kj}.$$

Da die Einheitsmatrix definiert ist als

$$(I_n)_{kj} := \begin{cases} 1 & \text{falls } k = j \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist in der Summe $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(I_n)_{kj}$ immer nur ein Eintrag ungleich null: derjenige, bei dem $k = j$ ist. In der Summe bleibt dann nur mehr a_{ik} für $k = j$, also a_{ij} übrig. Wir erhalten somit

$$(A \cdot I_n)_{ij} := a_{ij};$$

jeder Eintrag des Produkts $A \cdot I_n$ ist somit, wie gefordert, identisch zum entsprechenden Eintrag in A.

5.3 (Ü.3) Einfach über die Einsetzen in die Definition der Matrizenmultiplikation. Es gilt

$$(A \cdot B)_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

somit ist für eine $m \times n$-Matrix A das Produkt mit einem $n \times 1$-Spaltenvektor der folgende $m \times 1$-Spaltenvektor:

$$(A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})_i := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \,.$$

Dies ist, in Summennotation, die Aussage des zu beweisenden Satzes 5.4.

5.3 (Ü.5) Zu zeigen ist somit, dass die Summe zweier symmetrischer Matrizen wieder symmetrisch ist, und das Produkt eines Skalars mit einer symmetrischen Matrix wieder symmetrisch ist. Für zwei symmetrische $n \times n$-Matrizen A und B gilt

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

zu zeigen ist, dass $(A + B)_{ij} = (A + B)_{ji}$ ist. Wir wissen wegen der Symmetrieeigenschaft von A und B

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = A_{ji} + B_{ji} = (A + B)_{ji}.$$

Der Beweis, dass λA dann auch wieder symmetrisch ist verläuft analog: Zu zeigen ist $(\lambda A)_{ij} = (\lambda A)_{ji}$. Wir wissen

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij} = \lambda A_{ji} = (\lambda A)_{ji} \,.$$

5.3 (Ü.7) Berechnen von $f(g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$ durch Einsetzen in die Definition liefert

$$f(g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x + 6y \\ -4x - 5y \end{pmatrix}.$$

Die Matrizenrepräsentation dieser linearen Funktion ist identisch zum Produkt der Matrizenrepräsentationen von f und g:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

5.3 (Ü.9) Eine Interpretation der Skizze ist die Spiegelung um die y-Achse; dies ergibt die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Eine andere Interpretation ist die Rotation um 90° gegen den Uhrzeigersinn; dies ergibt die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.3 (Ü.11) Zu zeigen ist, dass es für jede lineare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Matrix A gibt, sodass gilt

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Mit den Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ gilt

$$\textit{wir wissen} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \textit{wir wissen} \qquad f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit lässt sich jede lineare Funktion durch eine Matrix darstellen.

5.4 Rang und Determinante einer Matrix

5.4 (Ü.1) Wir rechnen nach, dass die lineare Hülle zweier Vektoren sich nicht ändert, wenn man eine durch eine Kombination der beiden Vektoren ersetzt (α hier beliebig aber fix):

$$\textit{zu zeigen} \qquad L(\{x, y\}) = L(\{x + \alpha y, y\})$$

Mit der Definition der Mengengleichheit ist somit zu zeigen:

$$\begin{aligned} &\textit{zu zeigen} \qquad L(\{x, y\}) \subseteq L(\{x + \alpha y, y\}) \\ &\textit{zu zeigen} \qquad L(\{x + \alpha y, y\}) \subseteq L(\{x, y\}) \end{aligned}$$

Für die erste Zeile müssen wir somit für beliebig aber fixes $z \in L(\{x, y\})$ nachrechnen, dass auch $z \in L(\{x + \alpha y, y\})$ gilt. Mit der Definition der linearen Hülle erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \textit{wir wissen} \qquad &\underset{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}}{\exists} z = \lambda_1 x + \lambda_2 y \\ \textit{zu zeigen} \qquad &\underset{\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}}{\exists} z = \mu_1 (x + \alpha y) + \mu_2 y \end{aligned}$$

Nach Umformen der *zu zeigen*-Zeile in

zu zeigen $\quad \underset{\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{R}}{\exists} z = \mu_1 x + (\mu_1 \alpha + \mu_2) y$

erkennt man, dass für die gesuchten Belegungen von μ_1 und μ_2 somit gelten muss: $\mu_1 = \lambda_1$, $\mu_1 \alpha + \mu_2 = \lambda_2$. Die ist für die Belegungen $\mu_1 \leftarrow \lambda_1$ und $\mu_2 \leftarrow (\lambda_2 - \lambda_1 \alpha)$ gegeben.

Zum Beweis von $L(\{x + \alpha y, y\}) \subseteq L(\{x, y\})$ geht man ähnlich vor:

wir wissen $\quad \underset{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}}{\exists} z = \lambda_1 (x + \alpha y) + \lambda_2 y$

zu zeigen $\quad \underset{\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{R}}{\exists} z = \mu_1 x + \mu_2 y.$

Auch hier erkennt man wegen $\lambda_1(x + \alpha y) + \lambda_2 y = \lambda_1 x + (\lambda_1 \alpha + \lambda_2) y$, dass die gesuchten Variablenbelegungen $\mu_1 \leftarrow \lambda_1$ und $\mu_2 \leftarrow (\lambda_1 \alpha + \lambda_2)$ sind.

Da der Rang einer Matrix die Dimension der linearen Hülle ihrer Spalten bzw. Zeilen angibt zeigt obiges Argument, dass sich der Rang einer Matrix nicht ändert, wenn zu einer Zeile bzw. Spalte das Vielfache einer anderen Zeile bzw. Spalte addiert wird. Über das Argument mit der linearen Hülle einer Menge von Vektoren (die ja keine Reihenfolge haben) ist unmittelbar klar, dass das Vertauschen zweier Zeilen bzw. Spalten keine Auswirkung auf den Rang einer Matrix hat.

5.4 (Ü.3) Zum Beweis von

$$\det(a_{-1}, \ldots, a_{-i} + \lambda a_{-j}, \ldots, a_n) = \det(a_{-1}, \ldots, a_{-i}, \ldots, a_{-n})$$

formen wir die linke Seite wie folgt um:

$$\begin{aligned}
\det(a_{-1}, \ldots, &a_{-i} + \lambda a_{-j}, \ldots, a_n) \\
&= \det(a_{-1}, \ldots, a_{-i}, \ldots, a_n) + \det(a_{-1}, \ldots, \lambda a_{-j}, \ldots, a_n) \\
&= \det(a_{-1}, \ldots, a_{-i}, \ldots, a_n) + \lambda \det(a_{-1}, \ldots, a_{-j}, \ldots, a_n) \\
&= \det(a_{-1}, \ldots, a_{-i}, \ldots, a_n).
\end{aligned}$$

Der Term $\lambda \det(a_{-1}, \ldots, a_{-j}, \ldots, a_n)$ ist null, da sich a_{-j} ja in Spalte i befindet, in der Matrix in Spalte j aber nochmals a_{-j} ist (und die Determinante null ist, wenn dieselbe Spalte öfters vorkommt).

Zum Beweis von

$$\det(a_{-1}, \ldots, a_{-i}, \ldots, a_{-j}, \ldots, a_n) = -\det(a_{-1}, \ldots, a_{-j}, \ldots, a_{-i}, \ldots, a_n)\,.$$

formen wir folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
\det(a_{-1}, \ldots, &a_{-i}, \ldots, a_{-j}, \ldots, a_n) \\
&= \det(a_{-1}, \ldots, a_{-i}, \ldots, a_{-j} + a_{-i}, \ldots, a_n) \\
&= \det(a_{-1}, \ldots, a_{-i} - (a_{-j} + a_{-i}), \ldots, a_{-j} + a_{-i}, \ldots, a_n) \\
&= \det(a_{-1}, \ldots, -a_{-j}, \ldots, a_{-j} + a_i, \ldots, a_n) \\
&= -\det(a_{-1}, \ldots, a_{-j}, \ldots, a_{-j} + a_i, \ldots, a_n) \\
&= -\det(a_{-1}, \ldots, a_{-j}, \ldots, a_{-j}, \ldots, a_n) + \\
&\quad\; -\det(a_{-1}, \ldots, a_{-j}, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \\
&= 0 - \det(a_{-1}, \ldots, a_{-j}, \ldots, a_i, \ldots, a_n).
\end{aligned}$$

5.4 (Ü.5) Für die Bestimmung der Determinante einer Matrix in oberer Dreiecksform, also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kann man zuerst den Faktor a_{11} aus der ersten Spalte herausheben und erhält

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Addition des $-a_{12}$-fachen der ersten Spalte zur zweiten Spalte, und weiteres Herausheben ergibt

$$a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Diese Iterationen lassen sich solange fortsetzen, bis sich die zu zeigende Aussage ergibt.

5.4 (Ü.7)

(a) 11

(b) 0

(c) 1

(d) 0

(e) 0

(f) 0

5.4 (Ü.9) Man benötigt $n!$ rekursive Aufrufe der Determinantenfunktion.

5.4 (Ü.11) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\det(A + B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -8$$

aber

$$\det(A) + \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 + (-2) = -4\,.$$

5.4 (Ü.13) Für $n > 1$ sind die Determinanten in Punkt (a) und (c) null, da die Zeilen bzw. Spalten linear abhängig sind. Für die Determinante in Punkt (b) ist dies erst ab $n > 2$ der Fall.

5.5 Gaußsches Eliminationsverfahren

5.5 (Ü.1) Seien (Z_1, Z_2) zwei Zeilen eines linearen Gleichungssystems. Addition der ersten zur zweiten liefert $(Z_1, Z_1 + Z_2)$. Multiplikation der neuen zweiten Zeile mit (-1) ergibt $(Z_1, -Z_1 - Z_2)$. Addieren dieser zweiten Zeile zur ersten ergibt $(-Z_2, -Z_1 - Z_2)$. Die erste Zeile mit (-1) multiplizieren ergibt $(Z_2, -Z_1 - Z_2)$; Addieren der ersten zur zweiten Zeile ergibt $(Z_2, -Z_1)$. Nochmalige Multiplikation der zweiten Zeile mit (-1) ergibt die gewünschte Zeilenvertauschung.

5.5 (Ü.3)

(a) $L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $L = \varnothing$

5.5 (Ü.5) Im Fall von unendlich vielen Lösungen eines linearen Gleichungssystems haben die Lösungen die Form

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \\ x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ x'_{r+3} \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ \vdots \\ b''_r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -a''_{1(r+1)} \\ -a''_{2(r+1} \\ \vdots \\ -a''_{r(r+1)} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -a''_{1(r+2)} \\ -a''_{2(r+2)} \\ \vdots \\ -a''_{r(r+2)} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_{n-r} \begin{pmatrix} -a''_{1n} \\ -a''_{2n} \\ \vdots \\ -a''_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da die aufspannenden Vektoren alle in genau einer Zeile einen Eins-Eintrag haben (und alle anderen in dieser Zeile eine 0), lässt sich keiner dieser Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen. Daher sind alle Vektoren linear unabhängig.

5.5 (Ü.7) Man kann nachrechnen, dass die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus der ersten Lösung denselben Unterraum aufspannen wie die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ aus der zweiten Lösung (indem man etwa nachprüft, dass sie linear abhängig sind). Da weiters der Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ in L_1 liegt (und auch $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in L_2), gilt $L_1 = L_2$.

5.5 (Ü.9) Die beiden Vektoren, die die angegebene Mannigfaltigkeit aufspannen, bilden eine Basis des Kerns von f: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6 | Geometrie in $\mathbb{R}^n$

6.1 Skalarprodukt, Länge und Winkel

6.1 (Ü.1) Wir beweisen zuerst die Implikation von links nach rechts, und da den Spezialfall $v \cdot w \geq 0$, also $|v \cdot w| = v \cdot w$:

zu zeigen $v \cdot w = \|v\|\|w\| \Rightarrow v$ und w sind linear abhängig

Umformen liefert

wir wissen $v \cdot w = \|v\|\|w\|$

zu zeigen $\underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\exists} v = \lambda w$

Wir formen die *wir wissen*-Zeile um:

$$\begin{aligned} v \cdot w = \|v\|\|w\| &\Leftrightarrow 2\|v\|\|w\|v \cdot w = 2\|v\|^2\|w\|^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = \|v\|^2\|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|v \cdot w + \|v\|^2\|w\|^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = (\|v\|w - \|w\|v)^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = \|v\|w - \|w\|v \\ &\Leftrightarrow v = \frac{\|v\|}{\|w\|}w \end{aligned}$$

Die in der *zu zeigen*-Zeile gesuchte Belegung ist somit $\lambda \leftarrow \frac{\|v\|}{\|w\|}$. Der Fall $v \cdot w < 0$ verläuft ähnlich.

Die Implikation von rechts nach links, also

zu zeigen v und w sind linear abhängig $\Rightarrow |v \cdot w| = \|v\|\|w\|$,

bedeutet dann

wir wissen $\underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\exists} v = \lambda w$

zu zeigen $|v \cdot w| = \|v\|\|w\|$

Wir formen mit dem Wissen um die lineare Abhängigkeit um:

wir wissen $|v \cdot w| = |v \cdot (\lambda v)| = |\lambda||v \cdot v| = |\lambda|v^2 = |\lambda|\|v\|\|v\|$
$= \|v\|\|\lambda v\| = \|v\|\|w\|$,

womit der Beweis abgeschlossen ist.

6.1 (Ü.3)

(a) gilt nicht, etwa für $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) gilt, wegen $u^2 = u \cdot u = \sqrt{u \cdot u}^2 = \|u\|^2$

(c) gilt mit Einsetzen in Definition 6.1:

$$\begin{aligned} u\cdot(v+w) &= \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i+w_i) = \sum_{i=1}^{n}(u_iv_i+u_iw_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_iv_i + \sum_{i=1}^{n} u_iw_i = u\cdot v + u\cdot w \end{aligned}$$

6.1 (Ü.5) Diese Aussage gilt, wie man durch Einsetzen in Definition 6.1 nachrechnen kann:

$$(\lambda u)\cdot v = \sum_{i=1}^{n}(\lambda u_i)v_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} u_iv_i = \lambda(v\cdot w).$$

6.1 (Ü.7)

zu zeigen $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

wir wissen $\|v\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{v\cdot v} = 0 \Leftrightarrow v\cdot v = 0 \Leftrightarrow v = 0$

6.1 (Ü.9) Die Winkel sind für die ersten paar Dimensionen $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{4}}$, und im Allgemeinen $\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$. Für $n\to\infty$ tendiert dieser Ausdruck gegen $\arccos 0$, was einem Winkel von $\frac{\pi}{2} = 90°$ entspricht. Somit stehen in höheren Dimensionen nicht nur die Koordinatenachsen senkrecht aufeinander, sondern auch die Diagonalen stehen annährend senkrecht auf die Koordinatenachsen.

6.1 (Ü.11) Wir müssen Symmetrie, positiv-Definitheit sowie Bilinearität überprüfen.

wir wissen
$$\begin{aligned} P\cdot Q &= P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) \\ &= Q(-1)P(-1) + Q(0)P(0) + Q(1)P(1) \\ &= Q\cdot P, \end{aligned}$$

somit ist $\cdot$ symmetrisch. Für positiv definit gilt für $P \leq 0$:

wir wissen
$$\begin{aligned} P\cdot P &= P(-1)P(-1) + P(0)P(0) + P(1)P(1) \\ &= P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2 > 0. \end{aligned}$$

Damit gilt $P\cdot P = 0 \Leftrightarrow P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2 = 0$. Da P laut Angabe maximal Grad 2 hat, können nicht $P(-1)$, $P(0)$ und $P(1)$ alle null sein, ohne dass P das Nullpolynom ist. Es gilt also wie gefordert $P\cdot P = 0 \Leftrightarrow P = 0$.

Die Bilinearität ergibt sich direkt durch Einsetzen in die Definition; wir überprüfen etwa

zu zeigen $(P+Q)\cdot R = P\cdot R + Q\cdot R$

Wir wissen

$$\begin{aligned} (P+Q)\cdot R &= (P+Q)(-1)R(-1) + (P+Q)(0)R(0) + (P+Q)(1)R(1) \\ &= (P(-1)+Q(-1))R(-1) + (P(0)+Q(0))R(0) + \\ &\quad + (P(1)+Q(1))R(1) \\ &= P(-1)R(-1) + Q(-1)R(-1) + P(0)R(0) + Q(0)R(0) + \\ &\quad + P(1)R(1) + Q(1)R(1) \\ &= P\cdot R + Q\cdot R \end{aligned}$$

Die Bedingung $(\lambda P)\cdot Q = \lambda(P\cdot Q)$ lässt sich ähnlich nachrechnen, ebenso die Linearität im zweiten Argument von $\cdot$.

6.2 Projektionen

6.2 (Ü.1)

$$\begin{aligned}
&\textit{wir wissen} && v \perp w,\ \text{also } v \cdot w = 0\\
&\textit{zu zeigen} && \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2\\
&\textit{wir wissen} && \|v+w\|^2 = (v+w)^2 = (v+w)\cdot(v+w)\\
& && \qquad\quad = v^2 + 2v\cdot w + w^2 = v^2 + w^2\\
& && \qquad\quad = \|v\|^2 + \|w\|^2
\end{aligned}$$

6.2 (Ü.3)

$$\left\|\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}\right\|^2 = 54; \quad \left\|\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}\right\|^2 + \left\|\begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix}\right\|^2 = 21 + 33 = 54\,.$$

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\-9\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\5\\1\\2\end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}4\\5\\-8\\5\end{pmatrix}\right\|^2 = 130; \quad \left\|\begin{pmatrix}1\\0\\-9\\3\end{pmatrix}\right\|^2 + \left\|\begin{pmatrix}3\\5\\1\\2\end{pmatrix}\right\|^2 = 91 + 39 = 130\,.$$

6.2 (Ü.5) Direktes Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
\left(v - \frac{v\cdot w}{\|w\|^2}w\right)\cdot w &= v\cdot w - \left(\frac{v\cdot w}{\|w\|^2}w\right)\cdot w = v\cdot w - \frac{v\cdot w}{\|w\|^2}(w\cdot w)\\
&= v\cdot w - \frac{v\cdot w}{\|w\|^2}\|w\|^2 = v\cdot w - v\cdot w = 0\,.
\end{aligned}$$

6.2 (Ü.7) Wir ignorieren im Folgenden den Spezialfall, dass einer der Vektoren der Null-Vektor ist – eine solche Menge ist nämlich automatisch linear unabhängig, wie Einsetzen in die Definition zeigt. Seien also keiner der Vektoren $b_1, \dots, b_n$ der Null-Vektor.

$$\begin{aligned}
&\textit{wir wissen} && \underset{1\le j\ne k\le n}{\forall} b_j \cdot b_k = 0\\
&\textit{zu zeigen} && b_1,\dots,b_n \text{ sind linear unabhängig}
\end{aligned}$$

Wir setzen in die Definition linearer Unabhängigkeit ein:

$$\textit{zu zeigen} \qquad \underset{\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}}{\forall} \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Für beliebig aber fixes Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
&\textit{wir wissen} && \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0\\
&\textit{zu zeigen} && \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0
\end{aligned}$$

Wir berechnen auf beiden Seiten dieser *wir wissen*-Zeile das Skalarprodukt mit b_1:

$$\begin{aligned}
&\textit{wir wissen} && (\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n)\cdot b_1 = 0 \cdot b_1\\
&\textit{wir wissen} && \lambda_1 b_1 \cdot b_1 + \dots + \lambda_n b_n \cdot b_1 = 0
\end{aligned}$$

Da die Vektoren $b_1, \dots, b_n$ paarweise senkrecht stehen, vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\textit{wir wissen} \qquad \lambda_1 b_1 \cdot b_1 = 0.$$

Weil b_1 nicht der Null-Vektor ist, folgt $b_1 = 0$. Das gleiche Argument kann auf die anderen Vektoren $b_2, \dots, b_n$ angewandt werden, woraus wie gewünscht $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ folgt.

6.2 (Ü.9)

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}.$$

6.2 (Ü.11) Anwenden des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens liefert folgende Vektoren:

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} \\ 0 \\ \frac{13}{6} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}$ (da nur die Richtung, nicht aber die Länge des Vektors relevant ist), $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

6.2 (Ü.13) Wir beweisen zuerst „Zeilen von A bilden Orthonormalbasis" $\Rightarrow$ „A ist orthogonal"; seien dazu $a_{1-}, \dots, a_{n-}$ die Zeilen von A

$$\begin{aligned}
&\textit{wir wissen} \quad && \underset{1 \le j \ne k \le n}{\forall} a_{j-} \cdot a_{k-} = 0 \\
&\textit{wir wissen} \quad && \underset{1 \le k \le n}{\forall} \|a_{k-}\| = 1 \\
&\textit{zu zeigen} \quad && AA^T = I_n
\end{aligned}$$

Die beiden *wir wissen*-Zeilen können wie folgt zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
&\textit{wir wissen} \quad && a_{j-} \cdot a_{k-} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = j \\ 0 & \text{falls } k \ne j \end{cases} \\
&\textit{wir wissen} \quad && (AA^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^T_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = a_{i-} \cdot a_{j-} \\
& && \qquad = (I_n)_{ij},
\end{aligned}$$

womit diese Richtung des Beweises beendet ist. Man kann erkennen, dass sich das Argument ebenso auch in die andere Richtung führen lässt.

6.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

6.3 (Ü.1)

(a) Eigenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 6, Eigenvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2.

(b) Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 4, Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 0.

(c) Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 4, Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1.

6.3 (Ü.3) Das charakteristische Polynom einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ist $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$. Dieses Polynom hat somit genau $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ als Nullstellen; diese Nullstellen sind genau die Eigenwerte von A.

6.3 (Ü.5)

wir wissen $\quad \exists_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} Av = \lambda v$

zu zeigen $\quad (A - \lambda I_n)x = 0$ hat unendlich viele Lösungen

Wir formen die *wir wissen*-Zeile um:

$$Av = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad Av - \lambda v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)v = 0$$

Da $v \neq 0$ ist, besitzt das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda I_n)x = 0$ mindestens zwei Lösungen (nämlich $x = 0$ und $x = v$). Damit besitzt es unendlich viele Lösungen.

6.3 (Ü.7)

wir wissen $\quad \exists_{v \in V} Av = \lambda v$

zu zeigen $\quad \exists_{w \in V} A^2 w = \lambda^2 w$

Wir formen die *wir wissen*-Zeile um:

$$Av = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad AAv = A\lambda v \quad \Leftrightarrow \quad A^2 v = \lambda A v$$
$$\Leftrightarrow A^2 v = \lambda^2 v$$

Der gesuchte Vektor w ist somit der Eigenvektor v von A.

7 | Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1 Begriffsbildung und Axiomatisierung

7.1 (Ü.1) Die Wahrscheinlichkeiten sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

7.1 (Ü.3) $P($„zwei Buben“$) = P($„zwei Mädchen“$) = \frac{1}{4}$, $P($„ein Bub und ein Mädchen“$) = \frac{1}{2}$

7.1 (Ü.5)

(a) $(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1)$.

(b) $P(A) = \frac{10}{216}$

(c) nein, da

$$\text{„Augensumme 5“} = \{(1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1)\},$$

$$\text{„Augensumme 6“} = \{(2,2,2), (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1), (1,1,4), (1,4,1), (4,1,1)\}.$$

7.1 (Ü.7)

(a) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

(b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des unfairen Würfels ist wie folgt:

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Damit gilt $P($„gerade Zahl würfeln“$) = \frac{12}{21}$.

(c) $P($„Primzahl würfeln“$) = \frac{10}{21}$.

7.1 (Ü.9) Aus den Informationen kann man ablesen, dass 20 Studierende sowohl ein Smartphone als auch einen Computer besaßen. Damit besaßen 55 Studierende einen Computer, und 50 ein Smartphone.

7.1 (Ü.11)

(a) $\Omega = \Big\{(n_1, n_2) \mid 1 \leq n_1, n_2 \leq 4\Big\}$

(b) $P($„Augensumme ≤ 5“$) = P(\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}) = \frac{10}{16}$

(c) $P(\text{„ungerade Augensumme“}) = P(\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,4),(4,1),(3,4),(4,3)\}$ $= \frac{8}{16}$. Damit ist es gleich wahrscheinlich, eine ungerade Augensumme zu würfeln wie eine gerade.

7.1 (Ü.13)

(a) $\left(\frac{12}{37}\right)^5$

(b) $\left(\frac{25}{37}\right)^5$

(c) Der Spieler gewinnt bei jedem der folgenden disjunkten Ereignisse: rot, aber nicht erste Spalte (Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{37}$) oder erste Spalte (egal ob rot oder nicht, Wahrscheinlichkeit ebenfalls $\frac{12}{37}$). Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind somit $\left(\frac{24}{37}\right)^5$ bzw. $\left(\frac{13}{37}\right)^5$.

7.2 Elementare Zähltheorie

7.2 (Ü.1)

(a) $\binom{75}{3}$

(b) $\binom{72}{5}$

(c) $\binom{75}{3}\binom{72}{5}$

7.2 (Ü.3) Es gibt $\binom{20}{2}$ Möglichkeiten, zwei von 20 Bällen zu ziehen. Die günstigen (uns interessierenden) Möglichkeiten sind $(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),$ $\ldots,(19,20)$ – das sind 19 mit Differenz 1, und 18 mit Differenz 2. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit $\frac{37}{190}$.

7.2 (Ü.5)

(a) 5!

(b) 5! bzw. $5 \cdot 4 \cdot 3$

7.2 (Ü.7) 2^4

7.2 (Ü.9)

(a) $\binom{20+4-1}{4-1}$

(b) 4^{20}

7.2 (Ü.11)

(a) $\binom{12+3-1}{3-1}$

(b) $1/\binom{12+3-1}{3-1}$

(c) $11 \cdot 3/\binom{12+3-1}{3-1}$: Durchzählen der Aufteilungen (0,1,11), (0,2,10),…,(0,11,1) für den Fall, dass das erste Restaurant frei bleibt; Multiplizieren mit 3 für jedes der drei Restaurants.

7.2 (Ü.13)

(a) $4 \cdot 9 \cdot 12$

(b) $4 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 3!$

(c) $25 \cdot 24 \cdot 23$

7.2 (Ü.15) Wenn der Block von 3 und 4 auf Positionen 8 und 9 steht, kann der Block von 1 und 2 auf 6 Positionen stehen. Dieses Argument auf alle möglichen Positionen von 8 und 9 angewandt liefert 21 Kombinationen für die 1/2 Blöcke vor den 3/4 Blöcken. Multiplikationen mit den möglichen Anordnungen in den Blöcken ergibt $21 \cdot 2! \cdot 2!$.

7.2 (Ü.17)

(a) $52!$

(b) $49 \cdot 4!/52!$

7.2 (Ü.19)

(a) $\frac{12!}{4!8!}$

(b) nein, macht keinen Unterschied

(c) $\frac{11!}{4!8!}$

7.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

7.3 (Ü.1)

(a) $0.98 \cdot 0.97$

(b) $0.98 \cdot 0.03 + 0.97 \cdot 0.02$

7.3 (Ü.3)

(a) $\frac{1}{3}$

(b) $\frac{1}{2}$

7.3 (Ü.5)

$$P(\text{unfaire Münze} \mid 6\times \text{KOPF}) = \frac{P(6\times \text{KOPF} \mid \text{unfaire Münze})P(\text{unfaire Münze})}{P(6\times \text{KOPF})}$$

$$\begin{aligned} P(6\times \text{KOPF}) &= P(6\times \text{KOPF} \mid \text{unfaire Münze})P(\text{unfaire Münze}) + \\ &\quad P(6\times \text{KOPF} \mid \text{faire Münze})P(\text{faire Münze}) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{65} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{64}{65} = \frac{2}{65}. \end{aligned}$$

Damit ist $P(\text{unfaire Münze} \mid 6\times \text{KOPF}) = (1 \cdot 1/65)/(2/65) = \frac{1}{2}$.

7.3 (Ü.7)

(a) ja

(b) ja

(c) nein

(d) nein

7.3 (Ü.9) $P(\text{Test positiv}) = 0.5$, damit $P(K_1 \mid \text{Test positiv}) = 0.5333$, $P(K_2 \mid \text{Test positiv}) = 0.3333$, $P(K_3 \mid \text{Test positiv}) = 0.133333$.

7.3 (Ü.11)

(a) 0.005

(b) 0.14

7.3 (Ü.13)

(a) 0.0084

(b) 0.0814

8 Zufallsvariable

8.1 Diskrete Zufallsvariable

8.1 (Ü.1)

k	1	2	3	4	5	6	7
$f_Z(k)$	0.2	0.17	0	0.26	0.08	0	0.29

8.1 (Ü.3)

k	0	1	2	3	4
$f_Z(k)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{13}{36}$	0	$\frac{1}{36}$

8.1 (Ü.5)

(a) $f_X(k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-5/6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1/6} = 1\,.$

8.2 Verteilungen von diskreten Zufallsvariablen

8.2 (Ü.1) 0.9774

8.2 (Ü.3)

wir wissen $\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^k$

zu zeigen $\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$

Wir formen die linke Seite der *zu zeigen*-Zeile um:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^k = 1^k = 1\,.$$

8.2 (Ü.5) 0.1694

8.2 (Ü.7) 0.366

8.2 (Ü.9) Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Sechser (also alle sechs Tipps richtig) an. Die Wahrscheinlichkeit eines Sechser ist $1/\binom{45}{6}$; bei 8 Millionen abgegebenen Tipps ist X poissonverteilt mit $\lambda = 8\,000\,000/\binom{45}{6} = 0.982$. Damit gelten $P(X = 0) = 0.3745$, $P(X = 1) = 0.3678$ und $P(X = 2) = 0.1806$.

8.2 (Ü.11)

(a) 0.3012

(b) 0.0338

8.2 (Ü.13) 0.0656

8.2 (Ü.15) 0.1445

8.3 Mehrdimensionale Zufallsvariable

8.3 (Ü.1)

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

k	1	2	3	4	5	6
$f_Y(k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Die Zufallsvariablen X und Y sind nicht unabhängig, da etwa $f_{X,Y}(2,1) = \frac{1}{36}$ ist, aber $f_X(2)f_Y(1) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36}$ ist.

8.3 (Ü.3)

(a)

		X			
		1	2	3	4
Y	1	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	·
	2	·	$\frac{2}{16}$	·	·
	3	·	·	·	·
	4	·	·	·	$\frac{2}{16}$

(b)

k	1	2	3	4
$f_X(k)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$

k	1	2	3	4
$f_Y(k)$	$\frac{12}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{2}{16}$

(c)

k	1	2	3	4
$f_{X\vert Y=1}(k)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{4}{12}$	0

(d) Nein, nicht unabhängig, etwa wegen $f_{X,Y}(1,1) = \frac{2}{16} \neq \frac{2}{16} \cdot \frac{12}{16} = f_X(1)f_Y(1)$.

8.3 (Ü.5)

(a)

k	1	3	5
$f_X(k)$	$\frac{24}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$

k	0	1	2
$f_Y(k)$	$\frac{12}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{6}{36}$

(b)

k	1	3	5
$f_{X\|Y=0}(k)$	$\frac{8}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

(c) Ja, unabhängig, da $f_{X,Y}(k,j) = f_X(k)f_Y(j)$ immer gilt.

8.3 (Ü.7) Wir schreiben ohne Allquantoren:

$$\begin{aligned} &\textit{wir wissen} \quad && f_{X|Y=j}(k) = \frac{f_{X,Y}(k,j)}{f_Y(j)} \quad \text{(Definition bed. Verteilung)} \\ &\textit{wir wissen} && f_{X,Y}(k,j) = f_X(k)f_Y(j) \quad (X \text{ und } Y \text{ sind unabhängig}) \\ &\textit{zu zeigen} && f_{X|Y=j}(k) = f_X(k) \end{aligned}$$

Einsetzen der zweiten in die erste *wir wissen*-Zeile liefert unmittelbar die zu zeigende Aussage.

8.3 (Ü.9)

(a)

		X		
		0	1	2
	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{3}{36}$
Y	1	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	.
	2	$\frac{1}{36}$	.	.

(b) $f_{X,Y}(k,j) = \binom{2}{k}\binom{3}{j}\binom{4}{2-k-j}/\binom{9}{2}$

(c)

k	0	1	2
$f_X(k)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$

k	0	1	2
$f_Y(k)$	$\frac{21}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{1}{36}$

(d)

j	0	1	2
$f_{Y\|X=1}(j)$	$\frac{12}{18}$	$\frac{6}{18}$	0

(e) Nein, nicht unabhängig, etwa wegen $f_{X,Y}(0,0) = \frac{6}{36} \neq \frac{15}{36} \cdot \frac{21}{36} = f_X(0)f_Y(0)$.

8.3 (Ü.11)

		X				
		2	4	5	7	9
Y	1	0.1	0.15	0.15	0.05	0.05
	4	0.06	0.09	0.09	0.03	0.03
	6	0.02	0.03	0.03	0.01	0.01
	7	0.02	0.03	0.03	0.01	0.01

8.4 Erwartungswert und Varianz

8.4 (Ü.1) $E(X) = \frac{27}{16}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{503}{256}$

8.4 (Ü.3) $E(X) = \frac{3}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{7}{4}$

8.4 (Ü.5)

$$\begin{aligned}
&\textit{wir wissen} && \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^k, \quad \text{für } a = p,\ b = (1-p) \text{ somit} \\
&\textit{wir wissen} && \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 \\
&\textit{wir wissen} && k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \\
&\textit{zu zeigen} && \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np
\end{aligned}$$

Wir formen die linke Seite der *zu zeigen*-Zeile folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{(Herausheben } np\text{)} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \quad \text{(Indexanpassung)} \\
&= np\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k} (1-p)^{n-1-k} \quad (m := n-1) \\
&= np\underbrace{\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^{k} (1-p)^{m-k}}_{1} \\
&= np\,.
\end{aligned}$$

8.4 (Ü.7)

$$\begin{aligned}
&\textit{wir wissen} && \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1 \\
&\textit{zu zeigen} && \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda
\end{aligned}$$

Wir formen die linke Seite der *zu zeigen*-Zeile folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} &= \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= \lambda\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\\ &= \lambda\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}_{1}\\ &= \lambda\,.\end{aligned}$$

8.4 (Ü.9)

wir wissen	$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kf_X(k)$
wir wissen	$E(g(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)f_X(k)$
zu zeigen	$E(aX+b) = aE(X)+b$

Wir formen die linke Seite der *zu zeigen*-Zeile folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}E(aX+b) &= \sum_{k=0}^{\infty}(ak+b)f_X(k)\\ &= a\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} kf_X(k)}_{E(X)} + b\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)}_{1}\\ &= aE(X)+b\end{aligned}$$

8.4 (Ü.11)

wir wissen	$E(c) = c$ für Konstante c
wir wissen	$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
zu zeigen	$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

Wir formen die linke Seite der *zu zeigen*-Zeile folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX+b) &= E((aX+b)^2) - (E(aX+b))^2\\ &= E(a^2X^2+2abX+b^2) - (aE(X)+b)^2\\ &= a^2E(X^2)+2abE(X)+b^2-a^2(E(X))^2-2abE(X)-b^2\\ &= a^2\underbrace{\left(E(X^2)-(E(X))^2\right)}_{\mathrm{Var}(X)}\\ &= a^2\mathrm{Var}(X)\,.\end{aligned}$$

8.4 (Ü.13)

wir wissen	$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
wir wissen	$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1$
wir wissen	$\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$
zu zeigen	$\mathrm{Var}(X) = \lambda$ für $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, also

Zu zeigen ist somit $E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda$, wegen $E(X) = \lambda$ also $E(X^2) - \lambda^2 = \lambda$. Es gilt

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right] \\
&= \lambda \Big[\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\lambda} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}_{1} \Big] \\
&= \lambda^2 - \lambda.
\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar die zu zeigende Aussage.

8.5 Kovarianz und Korrelationskoeffizient

8.5 (Ü.1)

wir wissen $\quad \operatorname{Cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$

zu zeigen $\quad \operatorname{Cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$

Wir formen die linke Seite der *zu zeigen*-Zeile folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\
&= E((X \cdot Y) - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)) \\
&= E(X \cdot Y) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\
&= E(X \cdot Y) - E(Y)E(X)\,.
\end{aligned}$$

8.5 (Ü.3)

wir wissen $\quad X \sim \operatorname{Bin}(n,p)$

wir wissen $\quad X = \sum_{k=1}^{n} Y_i, \text{ mit } Y_i \sim \operatorname{Bernoulli}(p)$

wir wissen $\quad E(Y_i) = p$

zu zeigen $\quad E(X) = np$

Wir formen die linke Seite der *zu zeigen*-Zeile folgendermaßen um:

$$E(X) = E(\sum_{k=1}^{n} Y_i) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_i) = \sum_{k=1}^{n} p = np\,.$$

8.5 (Ü.5) Es gelten $E(X) = \frac{21}{20}$, $\operatorname{Var}(X) = \frac{259}{400}$, $E(Y) = \frac{21}{20}$, $\operatorname{Var}(Y) = \frac{259}{400}$, $E(X \cdot Y) = \frac{6}{5}$, $\operatorname{Cov}(X,Y) = \frac{39}{400}$, damit $\operatorname{Corr}(X,Y) = \frac{39}{259}$.

8.5 (Ü.7)

wir wissen $\quad \operatorname{Cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$

wir wissen $\quad E(g(X,Y)) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g(k,j) f_{X,Y}(k,j)$

zu zeigen $\quad \operatorname{Cov}(aX, bY) = ab\operatorname{Cov}(X,Y)$

Wir formen die linke Seite der *zu zeigen*-Zeile folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(aX, bY) &= E(aX \cdot bY) - E(aX)E(bY) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} abkj f_{X,Y}(k,j) - aE(X)bE(Y) \\
&= ab \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} kj f_{X,Y}(k,j)}_{E(X \cdot Y)} - abE(X)E(Y) \\
&= ab\Big(E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)\Big) \\
&= ab\mathrm{Cov}(X, Y)\,.
\end{aligned}$$

8.5 (Ü.9)

wir wissen	$0 \le 2(1 + \mathrm{Corr}(X, Y))$
wir wissen	$0 \le 2(1 - \mathrm{Corr}(X, Y))$
zu zeigen	$-1 \le \mathrm{Corr}(X, Y) \le 1\,.$

Die beiden Behauptungen der *zu zeigen*-Zeile ergeben sich als direkte Umformungen der beiden *wir wissen*-Zeilen.

8.6 Stetige Verteilungen

8.6 (Ü.1) $a = -\frac{1}{2}$

8.6 (Ü.3) $P(2 < Z < 3) = \frac{3}{4}$

8.6 (Ü.5)

(a) Ja, weil $\int_0^1 \int_0^1 f_{X,Y}(x, y)dxdy = 1$ gilt.

(b) $f_X(x) = -\frac{3}{5}x(x - 4)$

(c) $E(X) = \frac{13}{20}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{23}{400}$

(d) Nein, nicht unabhängig, da $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ ist.

8.6 (Ü.7) $E(X) = \frac{7}{3}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{9}$

8.7 Die Normalverteilung

8.7 (Ü.1)

wir wissen	$f(-x) = f(x) \quad (f \text{ ist symmetrisch})$
wir wissen	$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \quad (f \text{ ist Dichtefunktion})$
wir wissen	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad (F \text{ ist Verteilungsfunktion von } f)$
wir wissen	$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad \text{(Hinweis 1)}$
wir wissen	$\int_a^b f(x)dx = \int_{-a}^{-b} -f(-u)du = \int_{-b}^{-a} f(-u)du \quad \text{(Hinweis 2)}$
zu zeigen	$F(-x) = 1 - F(x)$

Aus der Formel zur Zerlegung des Integrals folgt mit $a = c$, dass $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ gilt. Wir formen die linke Seite der *zu zeigen*-Zeile folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t)dt = 1 - \int_{-x}^{\infty} f(t)dt = 1 - \int_{x}^{-\infty} -f(-u)du \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{x} f(-u)du = 1 - \int_{-\infty}^{x} f(u)du \\ &= 1 - F(x)\,. \end{aligned}$$

8.7 (Ü.3)

(a) 0.599

(b) 0.809

8.7 (Ü.5)

(a) -3.57

(b) 0.525

8.7 (Ü.7) $c = 8.615$

8.7 (Ü.9) 0.44

8.7 (Ü.11) 47.52 cm

8.7 (Ü.13) Approximation der Poissonverteilung durch Normalverteilung liefert 0.0071; exaktes Aufsummieren der Poissonverteilungswerte liefert 0.0043.

9 | Einführung in die schließende Statistik

9.1 Grundbegriffe der beschreibenden Statistik

9.1 (Ü.1)

(a) nominal
(b) quantitativ(-stetig)
(c) quantitativ(-diskret)
(d) nominal
(e) ordinal
(f) quantitativ(-stetig)
(g) nominal
(h) nominal
(i) nominal
(j) quantitativ(-diskret)

9.1 (Ü.3) +

9.1 (Ü.5) Histogramm links mit Boxplot rechts, da die meisten Daten links sind, und nur wenige Datenpunkte sich weit rechts befinden (im Boxplot als Ausreißer markiert). Für die Gleichverteilung im Histogramm rechts kann man im Boxplot erkennen, dass sich im mittleren Bereich 50 % der Daten befinden, mit gleich breitem Bereich links und rechts der Box. In diesen Bereichen befinden sich jeweils 25 % der Daten.

9.2 Mathematische Grundlagen der schließenden Statistik

9.2 (Ü.1) links: 0.263, Mitte: 0.693, rechts: -0.637

9.2 (Ü.3) $n = 40$

9.2 (Ü.5) Schätzung über $\bar{x} \approx np$ liefert $\hat{p} = \frac{3}{8}$.

9.2 (Ü.7) Schätzung über $\bar{x} \approx \frac{0+\beta}{2}$ liefert $\hat{\beta} = 1.76$. Da dies nicht möglich ist (ein Messwert ist 1.9!), können wir auch eine Schätzung über $s^2 \approx \frac{(\beta-0)^2}{12}$ versuchen. Dies liefert hier die bessere Schätzung $\hat{\beta} = 1.958$.

9.2 (Ü.9) Die Formel

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} & \text{falls } n \leq k \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gibt im Nenner die Anzahl aller Möglichkeiten an, n Zahlen ohne Zurücklegen aus der Menge $\{1, \ldots, N\}$ zu ziehen. Die für uns interessanten Möglichkeiten sind die, wo k die größte gezogene Zahl ist. Die Anzahl dieser Möglichkeiten ist durch $\binom{k-1}{n-1}$ gegeben: Alle anderen $n-1$ gezogenen Zahlen müssen kleiner als k sein; es gibt $k-1$ solcher Zahlen, die aus den restlichen $n-1$ Zahlen ausgewählt werden können.

9.2 (Ü.11) Auflösen der Gleichung $E(X) = \frac{n(N+1)}{n+1}$ für $E(X) = 62$ und $n = 5$ nach N liefert $N = 73.4$.

9.3 Maximum-Likelihood-Schätzungen

9.3 (Ü.1) Die Likelihood-Funktion ist

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

und damit ist

$$\begin{aligned}
-\log L(\sigma^2) &= -\log\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \sum_{i=1}^{n} \log\left(e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) \\
&= n\log(\sqrt{2\pi\sigma^2}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \\
&= n\log\left((2\pi\sigma^2)^{1/2}\right) + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \\
&= \frac{n}{2}\log(2\pi) + \frac{n}{2}\log(\sigma^2) + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.
\end{aligned}$$

Nullsetzen der Ableitung von $-\log L(\sigma^2)$ ergibt

$$\frac{d\left(-\log L(\sigma^2)\right)}{d\,\sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^2} - \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

und nach Multiplikation mit $2\sigma^4$ die Gleichung

$$n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

mit Lösung

$$\hat{\sigma}^2_{\mathrm{ML}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}_{\mathrm{ML}})^2,$$

wenn wir den unbekannten Parameter μ durch seinen Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\mu}_{\mathrm{ML}}$ ersetzen.

9.3 (Ü.3) Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist, zur Vereinfachung hier für die Werte $k = 62$ und $n = 5$

$$f_X(62) = \begin{cases} \dfrac{\binom{61}{4}}{\binom{N}{5}} & \text{falls } n \le k \le N \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir wissen bereits, dass $N \geq 62$ gelten muss, da ja schon ein Los mit Nummer 62 observiert wurde. Da $\binom{N}{5}$ aber für größere Werte von N immer größer, und $1/\binom{N}{5}$ für größere Werte von N immer kleiner wird, wird dieser Ausdruck für $N = 62$ maximiert. Dies liefert die wenig sinnvolle Schätzung, dass es soviele Lose gibt, wie die größte gezogene Losnummer angibt.

9.4 Lineare Regression

9.4 (Ü.1) Die Funktion $f(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_1 x_i - \theta_2)^2$ ist einmal nach θ_1, und einmal nach θ_2 abzuleiten. Die Ableitung nach θ_1 ergibt

$$-2 \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_1 x_i - \theta_2) x_i,$$

die nach θ_2 ergibt

$$-2 \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_1 x_i - \theta_2).$$

Mit

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

ergibt aus der Umformung des Terms $-2X^T(Y - X\theta)$ Folgendes:

$$\begin{aligned} -2X^T(Y - X\theta) &= -2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - (\theta_1 x_1 + \theta_2) \\ y_2 - (\theta_1 x_2 + \theta_2) \\ \vdots \\ y_n - (\theta_1 x_n + \theta_2) \end{pmatrix} \\ &= -2 \begin{pmatrix} x_1(y_1 - \theta_1 x_1 - \theta_2) + \dots + x_n(y_n - \theta_1 x_n - \theta_2) \\ y_1 - \theta_1 x_1 - \theta_2 + \dots + y_n - \theta_1 x_n - \theta_2 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

die beiden Zeilen sind somit identisch zu den oben angeführten Ableitungen.

9.4 (Ü.3) Auswertung der Formel aus Satz 9.5 ergibt für die Daten aus Übungsaufgabe 9.4 (Ü.2) den Maximum-Likelihood-Parameterschätzwert $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}} = \left(\frac{389}{545}, \frac{1118}{545}\right)$. Mit diesen Werten sind

$$\sum_{k=1}^n (y_k - f(x_k; \hat{\theta}_{\mathrm{ML}}))^2 = \frac{1394}{545} \quad \text{und}$$

$$\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2 = \frac{293}{6},$$

somit ist

$$\frac{\sum_{k=1}^n (y_k - f(x_k; \hat{\theta}_{\mathrm{ML}}))^2}{\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2} = \frac{8364}{159\,685}.$$

Für den Korrelationskoeffizienten der Daten aus Übungsaufgabe 9.4 (Ü.2) erhält man $r_{x,y} = \frac{389}{\sqrt{159\,685}}$, und damit auch wie gewünscht

$$1 - r_{x,y}^2 = \frac{8364}{159\,685}.$$

9.4 (Ü.5) Für beliebig aber fixes $x \in V$ gilt:

wir wissen	$x \in \text{kern}(A^T A)$
wir wissen	$B^T A^T = (A\,B)^T$
zu zeigen	$x \in \text{kern}(A)$

Einsetzen in die Definition des Kerns eine Funktion bzw. Matrix liefert

wir wissen	$A^T Ax = 0$
zu zeigen	$Ax = 0$

Wir erweitern die *wir wissen*-Zeile mit x^T und erhalten folgende Umformungen

$$x^T A^T Ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (Ax)^T Ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax = 0.$$

9.5 Einführung in die Theorie der Konfidenzintervalle

9.5 (Ü.1) $[53.0074, 55.3926]$

9.5 (Ü.3) Das 95 %-Konfidenzintervall ist $[5.64227, 13.3577]$, das 90 %-Konfidenzintervall ist $[6.64916, 12.3508]$.

9.5 (Ü.5) Das Konfidenzniveau ist etwa 95%.

9.5 (Ü.7) Eine ähnliche Umformung wie in Beispiel 9.22 liefert $\hat{p}(1-\hat{p}) = 0.0001627n$; da $\hat{p}(1-\hat{p}) \leq 0.25$ gilt, müssen mindestens $n = 1537$ Personen befragt werden.

9.5 (Ü.9) $[0.66748, 0.93252]$

9.6 Einführung in die Testtheorie

9.6 (Ü.1) Nein, die Wahrscheinlichkeit von 25 oder mehr und 15 oder weniger Sechsen unter 120-maligem Würfeln ist etwa 27 %.

9.6 (Ü.3) Wie in Beispiel 9.25 berechnet, umfasst der Ablehnungsbereich dieses Hypothesentests die Zahlen 60,. . . ,100 und 0,. . . ,40. Die Wahrscheinlichkeit, mit einer unfairen Münze mit $P(\text{Kopf}) = 0.6$ in diesem Bereich zu landen, ist etwa 54.3 %.

9.6 (Ü.5) Eine ähnliche Umformung wie in Beispiel 9.25 liefert $k = 31.5$; der Akzeptanzbereich ist demnach die Menge $\{469, \ldots, 531\}$, die anderen Zahlen in $\mathbb{N}_{\leq 1000}$ bilden den Ablehnungsbereich.

9.6 (Ü.7) Man verwirft die Nullhypothese, da für die $N(176, 4/\sqrt{10})$-verteilte Zufallsvariable $\overline{X}$ ein Wert von 179 oder mehr nur Wahrscheinlichkeit 0.009 hat. Der p-Wert dieses Tests ist somit $2 \cdot 0.009 = 0.018$ und liegt unter der Grenze von $\alpha = 0.05$.

9.6 (Ü.9) Man verwirft weiter die Nullhypothese, da die Student-t-verteilte Zufallsvariable $(\overline{X} - 176)/(4/\sqrt{10})$ (mit 9 Freiheitsgraden) einen Wert von $(179 - 176)/(4/\sqrt{10})$ oder mehr nur mit Wahrscheinlichkeit 0.021 annimmt. Der p-Wert dieses Tests ist mit 0.042 kleiner als das Signifikanzniveau von 0.05.

Das 95 % Konfidenzintervall für μ ist $[176.139, 181.861]$. Wie zu erwarten, ist der Wert 176 *nicht* im Konfidenzintervall.

A | Lambda-Kalkül

A.1 Formale Konzepte des Lambda-Kalküls

A.1 (Ü.1)

(a) $\lambda x.x\,y$
(b) $\lambda xy.x\,(x\,y)$
(c) $\lambda xy.x\,x\,y$
(d) $\lambda x.x\,(\lambda y.x\,y)\,x$
(e) $(x\,y\,z)\,((x\,z\,x)\,(x\,y))$

(a) u
(b) $(\lambda z.z\,z)\,(\lambda z.z\,z)$ (keine Normalform)
(c) y
(d) $y\,(z\,z)$

A.2 Arithmetik und Aussagenlogik im Lambda-Kalkül

A.2 (Ü.1)

(a)

$$\begin{aligned}\textsc{succ}\,\bar{2} &\equiv (\lambda nsz.s\,(n\,s\,z))\,(\lambda sz.s\,(s\,z)) \to_\beta \lambda sz.s\,((\lambda sz.s\,(s\,z))\,s\,z)\\ &\to_\beta \lambda sz.s\,(s\,(s\,z)) \equiv \bar{3}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\textsc{add}\,\bar{3}\,\bar{2} &\equiv (\lambda mnsz.m\,s\,(n\,s\,z))\,\bar{3}\,\bar{2} \to_\beta \lambda sz.\bar{3}\,s\,(\bar{2}\,s\,z)\\ &\equiv \lambda sz.(\lambda sz.s\,(s\,(s\,z)))\,s\,(\bar{2}\,s\,z) \to_\beta \lambda sz.s\,(s\,(s\,(\bar{2}\,s\,z)))\\ &\equiv \lambda sz.s\,(s\,(s\,((\lambda sz.s\,(s\,z))\,s\,z))) \to_\beta \lambda sz.s\,(s\,(s\,(s\,(s\,z))))\\ &\equiv \bar{5}\,.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\textsc{mult}\,\bar{2}\,\bar{3} &\equiv (\lambda mns.m(n\,s))\,\bar{2}\,\bar{3} \to_\beta \lambda s.\bar{2}\,(\bar{3}\,s)\\ &\equiv \lambda s.\bar{2}\,((\lambda sz.s\,(s\,(s\,z)))\,s) \to_\beta \lambda s.\bar{2}\,(\lambda z.s\,(s\,(s\,z)))\\ &\equiv \lambda s.(\lambda sz.s\,(s\,z))\,(\lambda z.s\,(s\,(s\,z)))\\ &\to_\beta \lambda s.(\lambda z.(\lambda z.s\,(s\,(s\,z)))\,((\lambda z.s\,(s\,(s\,z)))\,z))\\ &\to_\beta \lambda sz.(\lambda z.s\,(s\,(s\,z)))\,(s\,(s\,(s\,z)))\\ &\to_\beta \lambda sz.s\,(s\,(s\,(s\,(s\,(s\,z)))))\\ &\equiv \bar{6}.\end{aligned}$$

A.2 (Ü.3) $\textsc{impl} := \lambda xy.x\,\mathtt{f}\,\mathtt{w}\,\mathtt{w}\,y$

A.3 Programmieren im Lambda-Kalkül

A.3 (Ü.1) $\textsc{triple} := \lambda abcz.a\,b\,c$, $\textsc{proj}_1 := \lambda z.z\,(\lambda abc.a)$, $\textsc{proj}_2 := \lambda z.z\,(\lambda abc.b)$, $\textsc{proj}_3 := \lambda z.z\,(\lambda abc.c)$.

A.3 (Ü.3)

$$\begin{aligned}
g\,\bar{1} &\equiv (\lambda n.\textsc{if_then_else}\,(\textsc{iszero}\,n)\,\bar{0}\,\bar{1})\,\bar{1} \\
&\to_\beta \textsc{if_then_else}\,(\textsc{iszero}\,\bar{1})\,\bar{0}\,\bar{1} \\
&\equiv (\lambda x.x)\,(\textsc{iszero}\,\bar{1})\,\bar{0}\,\bar{1} \\
&\to_\beta (\textsc{iszero}\,\bar{1})\,\bar{0}\,\bar{1} \\
&\equiv ((\lambda nxy.n\,(\lambda z.y)\,x)\,\bar{1})\,\bar{0}\,\bar{1} \\
&\to_\beta \bar{1}\,(\lambda z.\bar{1})\,\bar{0} \\
&\equiv (\lambda sz.s\,z)\,(\lambda z.\bar{1})\,\bar{0} \\
&\to_\beta (\lambda z.\bar{1})\,\bar{0} \\
&\to_\beta \bar{1}.
\end{aligned}$$

A.3 (Ü.5)

$$\textsc{length} := \Theta\ \lambda fn.\textsc{if\_then\_else}\,(\textsc{isempty}\,n)\,\bar{0}\,(\textsc{succ}\,(f\,(\textsc{proj}_2\,n)))$$

A.3 (Ü.7)

$$\begin{aligned}
Y\,F &\equiv (\lambda f.(\lambda x.f\,(x\,x))\,(\lambda x.f\,(x\,x)))\,F \\
&\to_\beta (\lambda x.F\,(x\,x))\,(\lambda x.F\,(x\,x)) \\
&{}_\beta\!\leftarrow F\,((\lambda x.F\,(x\,x))\,(\lambda x.F\,(x\,x))) \\
&\leftarrow_\beta F\,((\lambda f.(\lambda x.f\,(x\,x))\,(\lambda x.f\,(x\,x)))F) \\
&\equiv F\,(Y\,F).
\end{aligned}$$

Damit gilt $Y\,F =_\beta F\,(Y\,F)$, aber wegen der Umformung zwischen der dritten und der vierten Zeile eben nicht $Y\,F \to_\beta^* F\,(Y\,F)$.

B Gleitkommazahlen

B.1 Gleitkommadarstellung

B.1 (Ü.1) $0.7_{10} = 0.10\overline{1100}_2 = 0.2\overline{0022}_3 = 0.3\overline{2}_5$, $0.85_{10} = 0.110\overline{1100}_2 = 0.211\overline{2211}_3 = 0.4\overline{1}_5$.
B.1 (Ü.3) Die zu 1.2 nächste Maschinenzahl ist 1.25, die zu 2.2 ist 2.25, die zu 3.2 ist 3.25, die zu 4.2 ist 4, die zu 5.2 ist 5.

B.2 Gleitkommaarithmetik

B.2 (Ü.1) Es gelten $\mathrm{fl}(x) = 0.23333 \times 10^1$ und $\mathrm{fl}(y) = 0.14286 \times 10^0$, somit $x \oplus y = 0.24762 \times 10^1$ mit einem absoluten Fehler von 0.952381×10^{-5}, und einem relativen Fehler von 0.384615×10^{-5}. Weiters ist $x \ominus y = 0.21904 \times 10^1$ mit einem absoluten Fehler von 0.761905×10^{-4}, und einem relativen Fehler von 0.347826×10^{-4}.
B.2 (Ü.3) $11.111\,\%$