

Signalverarbeitung

Charakterisierung der Signale

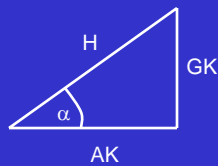
SE+ Med 4. Semester

Werner Backfrieder

Backfrieder-Hagenberg

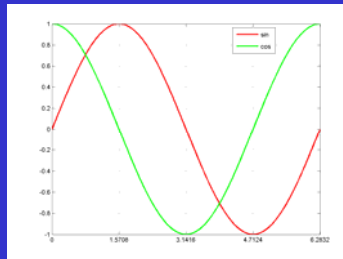
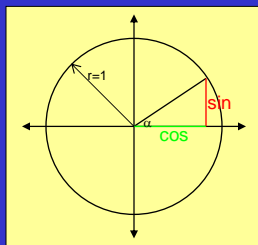
Mathematisches Repetitorium

- Winkel- oder Kreisfunktionen



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothense}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothense}}$$



Backfrieder-Hagenberg

Mathematisches Repetitorium

- Komplexe Zahlen
 - Zahl besteht aus zwei Komponenten: Real- und Imaginärteil

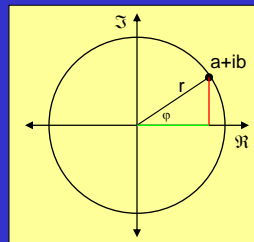
$$z = a + ib, \quad i = \sqrt{-1}$$

- Darstellung in der komplexen Zahlenebene
- Alternative Darstellung in Polarkoordinaten (r, φ) ,
Absolutwert und Phase

$$a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arccos(a / r)$$

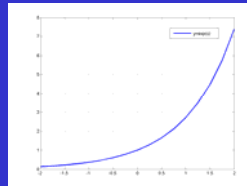


Backfrieder-Hagenberg

Mathematisches Repetitorium

- Exponentialfunktion

$$y = e^x, \quad e = 2.71\dots$$



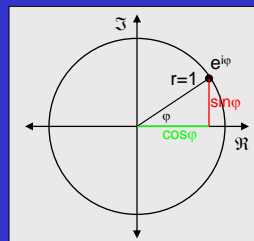
- komplexe Exponentialfunktion

- beschreibt in der komplexen Ebene einen Kreis mit Radius 1

$$z = e^{i\varphi}$$

$$|e^{i\varphi}| = 1$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$



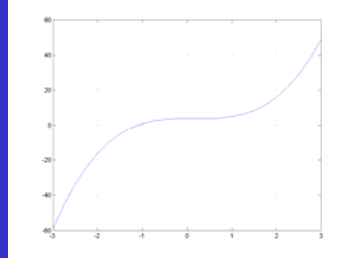
Backfrieder-Hagenberg

Mathematisches Repetitorium

- Polynome vom Grad N

$$y = \sum_{n=0}^N a_n \cdot x^{N-n}$$

- Beispiel: $y = 2x^3 - x^2 + 4$



- Eigenschaften
 - N Nullstellen
 - Produkt aus N-Radices
 - Summe aus geraden und ungeraden Termen

$$y = \prod_{i=1}^N (x - x_i)$$

Backfrieder-Hagenberg

Mathematisches Repetitorium

- Differenzieren
 - Polynome, Winkelfunktionen, Exponentialfunktion
 - Produktregel
 - Kettenregel

- Integrieren

- unbestimmtes Integral
 - „Umkehrung“ des Differenzierens

$$F(x) = \int f(x) dx$$

- bestimmtes Integral
 - Fläche unter der Kurve

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b)$$

- Partielle Integration

$$(a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'$$

$$a' \cdot b = (a \cdot b)' - a \cdot b'$$

$$\int a' \cdot b dx = a \cdot b - \int a \cdot b' dx$$

Backfrieder-Hagenberg

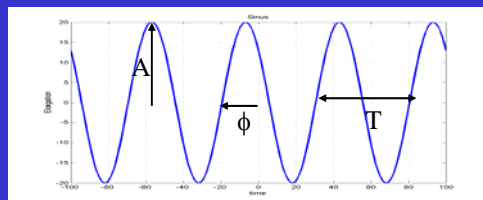
Charakterisierung von Signalen

- Elementare Signale
- Deterministische und stochastische Signale
- Periodische und kausale Signale
- Gerade und ungerade Signale
- Energie- und Leistungssignale
- Kontinuierliche und zeitdiskrete Signale

Backfrieder-Hagenberg

Analog: Elementare Signale

- Elementare Signale bilden die Grundlage für komplexe komplizierte Signalformen und besitzen eine einfache mathematische Beschreibung $y(t)$.
- Auf sie baut die Theorie der Signalverarbeitung auf
- Beispiel: Sinusschwingung



$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

A...Amplitude

$\omega = 2\pi/T$...Kreisfrequenz

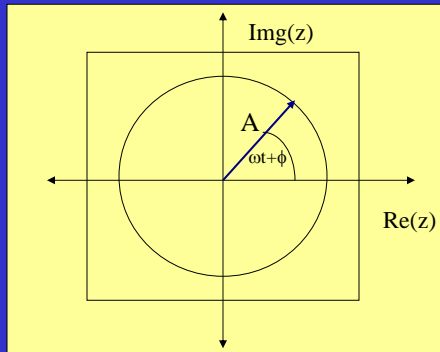
T...Periodendauer

ϕ ...Phase

Backfrieder-Hagenberg

Analog: Elementare Signale

- komplexe Signale
- $z(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi) + i A \cdot \sin(\omega t + \phi) = A \cdot e^{i(\omega t + \phi)}$



Backfrieder-Hagenberg

Komplexes Signal:
Rotierender Zeiger in der komplexen Ebene, Beschreibung durch komplexe Exponentialfunktion.

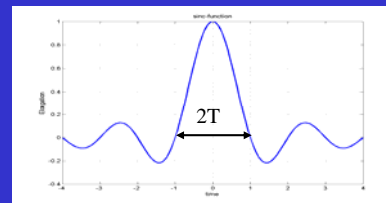
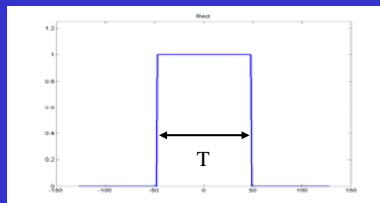
Analog: Elementare Signale

- Rechtecksfunktion

$$y(t) = \text{rect}(t/T) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| \geq T/2 \end{cases}$$

- Sinc-Funktion

$$\text{sinc}(t/T) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$



Backfrieder-Hagenberg

Analog: Elementare Signale

- Dirac-Funktion

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

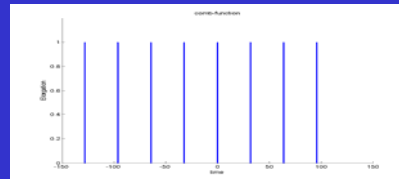
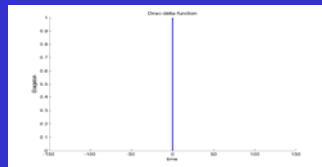
- Kammfunktion

$$\text{comb}(t/T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

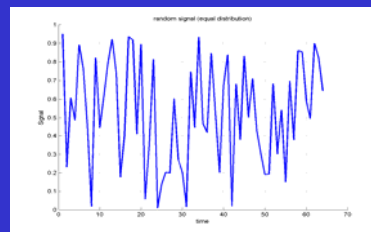
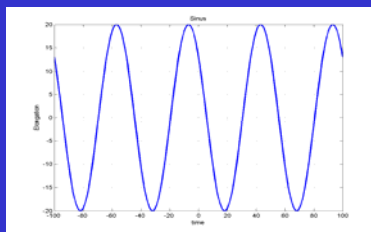
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$



Backfrieder-Hagenberg

Deterministische und stochastische Signale

- Deterministische Signale
 - bekannte Regeln bestimmen Signalverlauf, z.B. EKG
- Stochastische Signale
 - zufällige Signale: Rauschen, Datensignale, Sprache, EEG, Information
 - statistische Beschreibung



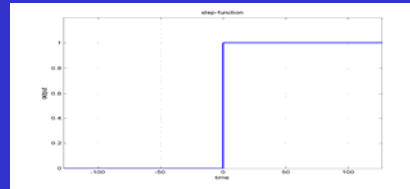
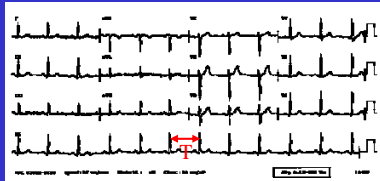
Backfrieder-Hagenberg

Periodische und kausale Signale

- Periodische Signale: $y(t) = y(t+T)$
T... kleinstmögliches Intervall => Fundamentalperiode
- Kausales Signal

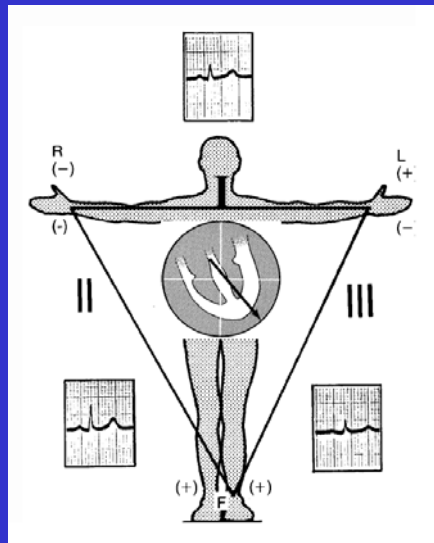
$$y(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Beispiel: $y(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ Sprungfunktion



Backfriedler-Hagenberg

EKG-Signal



Dreipunkt-Ableitung:
 Signal an den Ableitungen entspricht der Projektion des rotierenden Polarisationsvektors auf die Verbindungsgerade zwischen den Ableitungspunkten (Elektroden).

Backfriedler-Hagenberg

Gerade und ungerade Signale

- **gerades Signal**
 $y(t)=y(-t)$ Spiegelung in Zeitrichtung, z.B. $\cos(\omega t)$
- **ungerades Signal**
 $y(t)=-y(-t)$ Spiegelung am Ursprung, z.B. $\sin(\omega t)$
- Jedes Signal ist als Summe eines geraden und ungeraden Anteils darstellbar

$$y(t) = \underbrace{\frac{y(t)}{2} + \frac{y(-t)}{2}}_{\text{gerade}} + \underbrace{\frac{y(t)}{2} - \frac{y(-t)}{2}}_{\text{ungerade}}$$

Backfrieder-Hagenberg

Energie- und Leistungssignal

- **Strom:**

$$P=U \cdot I \quad U=R \cdot I \quad P=U^2/R \quad W=P \cdot t$$

- **Energiesignal**

$$0 < W = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt < \infty$$

rect

sinc

zeit-+wertbegrenzt

- **Leistungssignal**

$$0 < P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |y(t)|^2 dt < \infty$$

sin

cos

Backfrieder-Hagenberg

Kontinuierliche und diskrete Signale

- Kontinuierliche (analoge) Signale
 - stetige Funktion abhängig von der Zeit
 - z.B. Schalldruck, Spannung, EKG
- Zeitdiskrete Signale
 - Funktion nur an bestimmten Stützstellen definiert
 - Abtastung oder generisch diskret

