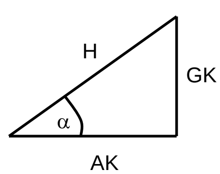
Signalverarbeitung
Charakterisierung der Signale

SE+ Med 4. Semester

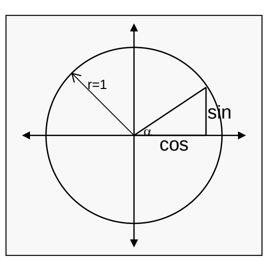
Werner Backfrieder

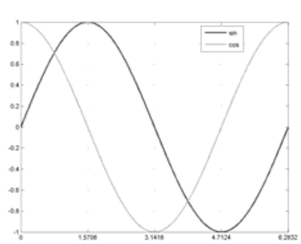
Mathematisches Repetitorium

- Winkel- oder Kreisfunktionen



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$





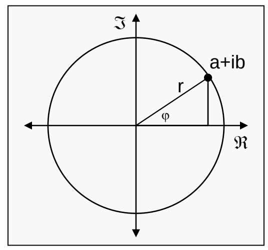
Mathematisches Repetitorium

- Komplexe Zahlen
  - Zahl besteht aus zwei Komponenten: Real- und Imaginärteil

$$z = a + ib, \;\; i = \sqrt{-1}$$

  - Darstellung in der komplexen Zahlenebene
  - Alternative Darstellung in Polarkoordinaten (r,φ), Absolutwert und Phase

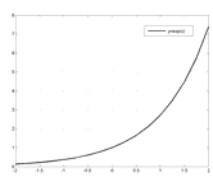
$$a = \mathrm{Re}(z), \;\; b = img(z)$$
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\varphi = \arccos(a / r)$$



Mathematisches Repetitorium

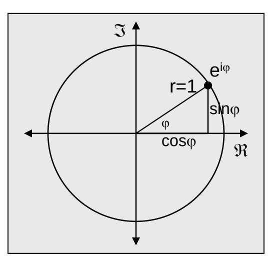
- Exponentialfunktion

$$y = e^x, \;\; e = 2.71...$$



- komplexe Exponentialfunktion
  - beschreibt in der komplexen Ebene einen Kreis mit Radius 1

$$z = e^{i\varphi}$$
$$\left| e^{i\varphi} \right| = 1$$
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

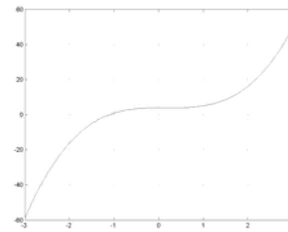


Mathematisches Repetitorium

- Polynome vom Grad N

$$y = \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot x^{N-n}$$

  - Beispiel: $y = 2x^3 - x^2 + 4$



- Eigenschaften
  - N Nullstellen
  - Produkt aus N-Radices
  - Summe aus geraden und ungeraden Termen

$$y = \prod_{i=1}^{N} (x - x_i)$$

Backfrieder-Hagenberg

Mathematisches Repetitorium

- Differenzieren
  - Polynome, Winkelfunktionen, Exponentialfunktion
  - Produktregel
  - Kettenregel
- Integrieren
  - unbestimmtes Integral
    - „Umkehrung" des Differenzierens

$$F(x) = \int f(x)dx$$

  - bestimmtes Integral
    - Fläche unter der Kurve

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$$

  - Partielle Integration

$$(a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'$$
$$a' \cdot b = (a \cdot b)' - a \cdot b'$$
$$\int a' \cdot b \; dx = a \cdot b - \int a \cdot b' \; dx$$

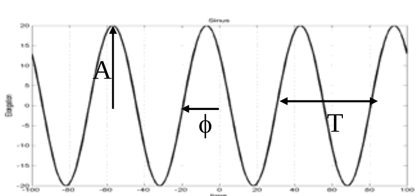
Backfrieder-Hagenberg

Charakterisierung von Signalen

- Elementare Signale
- Deterministische und stochastische Signale
- Periodische und kausale Signale
- Gerade und ungerade Signale
- Energie- und Leistungssignale
- Kontinuierliche und zeitdiskrete Signale

Analog: Elementare Signale

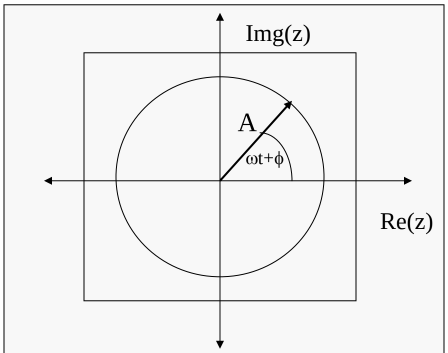
- Elementare Signale bilden die Grundlage für komplexe komplizierte Signalformen und besitzen eine einfache mathematische Beschreibung *y(t).*
- Auf sie baut die Theorie der Signal-verarbeitung auf
- Beispiel: Sinusschwingung



$y(t)=A*\sin(\omega t+\phi)$
A....Amplitude
$\omega=2\pi/T$....Kreisfrequenz
T....Periodendauer
ϕ....Phase

Analog: Elementare Signale

- komplexe Signale
- $z(t)=A*\cos(\omega t+\phi)+iA*\sin(\omega t+\phi)=A*e^{i(\omega t+\phi)}$



<u>Komplexes Signal:</u>
Rotierender Zeiger in der komplexen Ebene, Beschreibung durch komplexe Exponential-funktion.

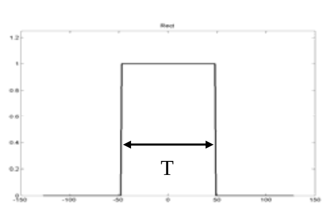
Analog: Elementare Signale

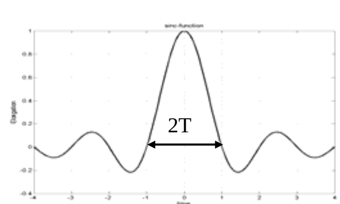
- Rechtecksfunktion

$$y(t) = rect(t/T) = \begin{cases} 1 \forall |t| < T/2 \\ 0 \forall |t| \geq T/2 \end{cases}$$

- Sinc-Funktion

$$\text{sinc}(t/T) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$





Analog: Elementare Signale

- Dirac-Funktion

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

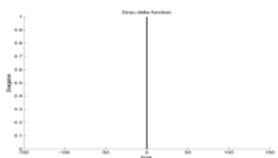
- Kammfunktion

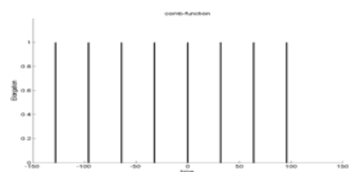
$$comb(t/T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

<u>Eigenschaften</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t)dt = f(t_0)$$

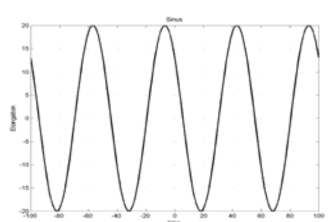


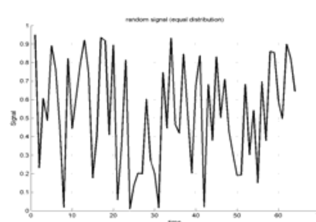


Backfrieder-Hagenberg

Deterministische und stochastische Signale

- Deterministische Signale
  - bekannte Regeln bestimmen Signalverlauf, z.B. EKG
- Stochastische Signale
  - zufällige Signale: Rauschen, Datensignale, Sprache, EEG, Information
  - statistische Beschreibung



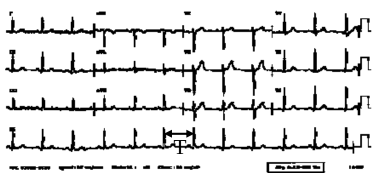


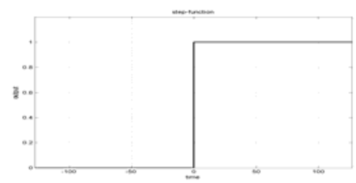
Backfrieder-Hagenberg

Periodische und kausale Signale

- Periodische Signale: y(t)=y (t+T)
  T… kleinstmögliches Intervall => Fundamentalperiode
- Kausales Signal $y(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

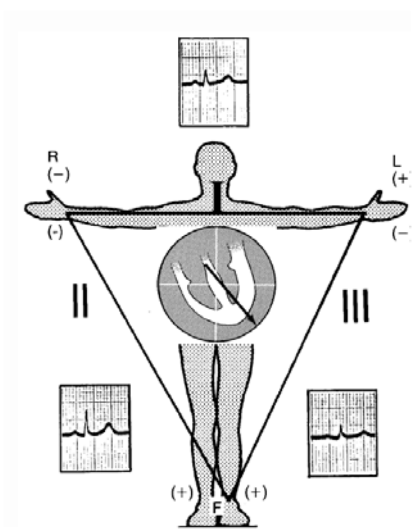
Beispiel: $y(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ Sprungfunktion





Backfrieder-Hagenberg

EKG-Signal



Dreipunkt-Ableitung:
Signal an den Ableitungen entspricht der Projektion des rotierenden Polarisationsvektors auf die Verbindungsgerade zwischen den Ableitungspunkten (Elektroden).

Backfrieder-Hagenberg

Gerade und ungerade Signale

- gerades Signal
  $y(t)=y(-t)$ Spiegelung in Zeitrichtung, z.B. $\cos(\omega t)$
- ungerades Signal
  $y(t)=-y(-t)$ Spiegelung am Ursprung, z.B. $\sin(\omega t)$

- Jedes Signal ist als Summe eines geraden und ungeraden Anteils darstellbar

$$y(t)=\underbrace{\frac{y(t)}{2}+\frac{y(-t)}{2}}_{gerade}+\underbrace{\frac{y(t)}{2}-\frac{y(-t)}{2}}_{ungerade}$$

Energie- und Leistungssignal

- Strom:

$P=U*I$	$U=R*I$	$P=U^2/R$	$W=P*t$

- Energiesignal

$$0<W=\int_{-\infty}^{\infty}\left|y(t)\right|^2 dt<\infty$$

rect
sinc
zeit-+wertbegrenzt

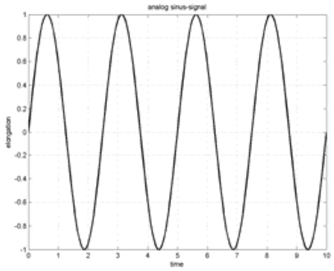
- Leistungssignal

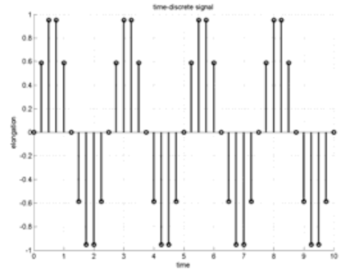
$$0<P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|y(t)\right|^2 dt<\infty$$

sin
cos

Kontinuierliche und diskrete Signale

- Kontinuierliche (analoge) Signale
  - stetige Funktion abhängig von der Zeit
  - z.B. Schalldruck, Spannung, EKG
- Zeitdiskrete Signale
  - Funktion nur an bestimmten Stützstellen definiert
  - Abtastung oder generisch diskret





Backfrieder-Hagenberg