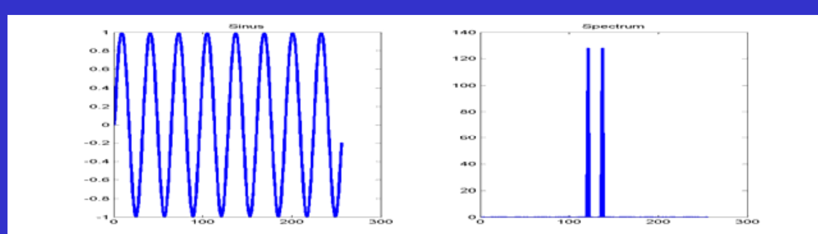
Signalverarbeitung

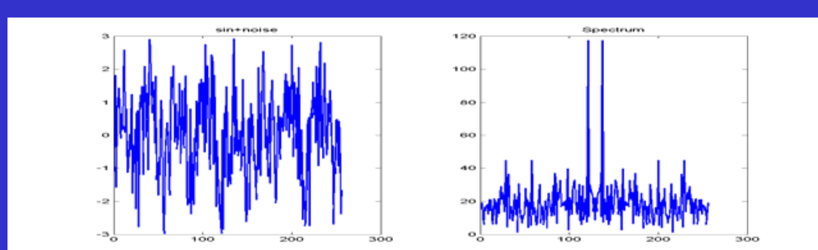
Fourierreihe und Fouriertransformation

SE+ Med 4. Semester

Werner Backfrieder

Motivation: Spektrale Analyse



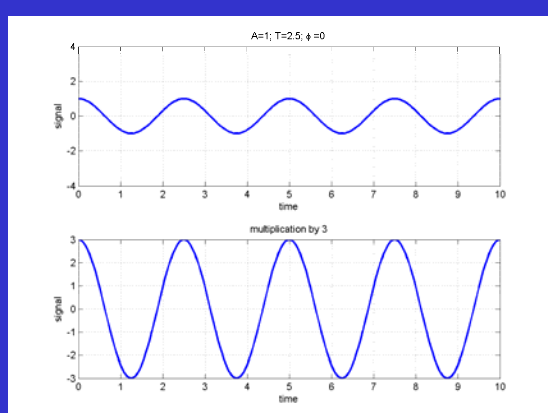


Fourier-Transformation

- Fouriertransformation
  - *Analyse zeitlicher Signale*
- Signal zusammengesetzt aus Schwingungen
- Berechnung der „Stärke“ der einzelnen Frequenzen

Backfrieder-Hagenberg

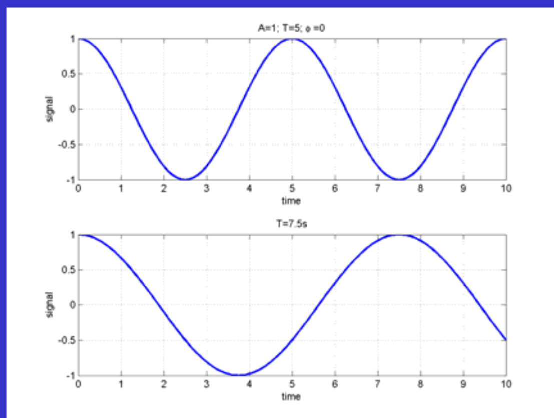
Schwingung: Multiplikation



Jeder Punkt der Schwingung wird mit einem Faktor multipliziert.

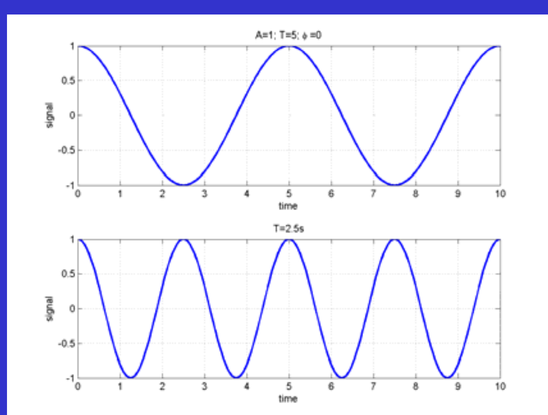
Backfrieder-Hagenberg

Schwingung: Frequenz



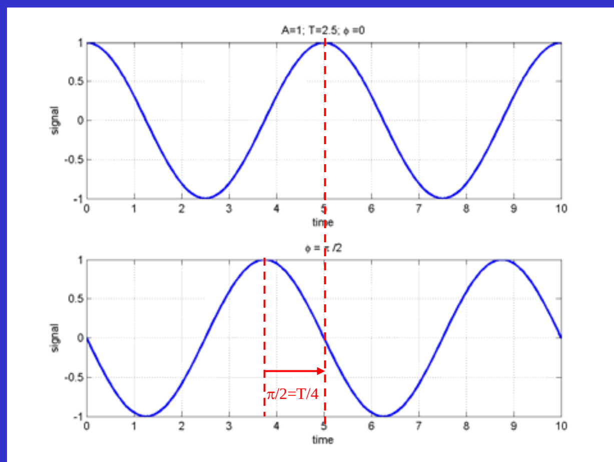
$\omega = 2*\pi/T$
Periodendauer verlängert, Frequenz verringert

Schwingung: Frequenz



Erhöhung der Frequenz

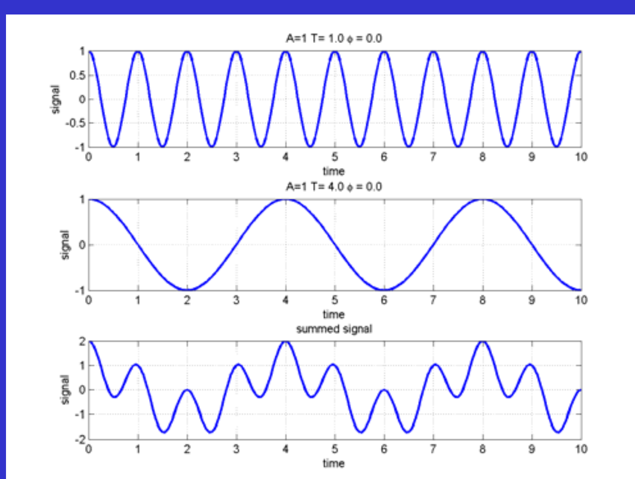
Schwingung: Phase



Die Schwingung wird um ein Intervall nach links (+) oder rechts (-) verschoben.

$y(t=0)=y(\phi)$

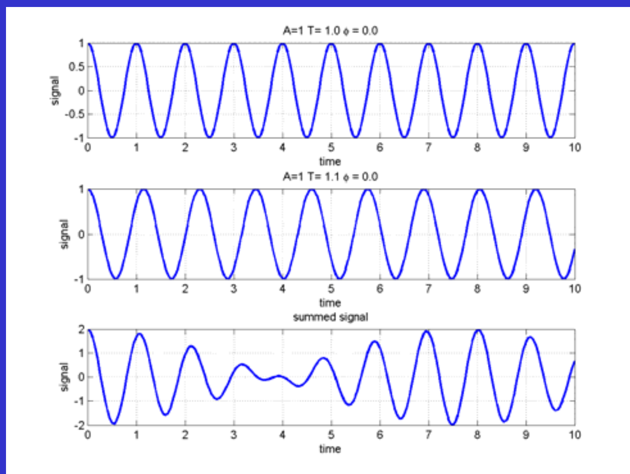
Addition von Schwingungen



$y(t)=y_1(t)+y_2(t)$

Schwingungen werden punktweise addiert.

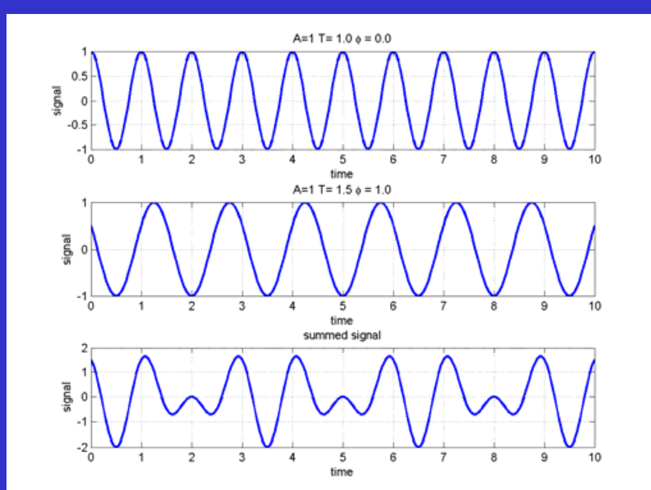
Addition von Schwingungen, Schwebung



$y(t)=y_1(t)+y_2(t)$

Sind die Frequenzen der Schwingungen fast gleich. Entsteht periodisch ab- und anschwellendes Signal=Schwebung.
Frequenz der Schwebung:
$f=|f_1-f_2|$

Addition von Schwingungen, Periodizität

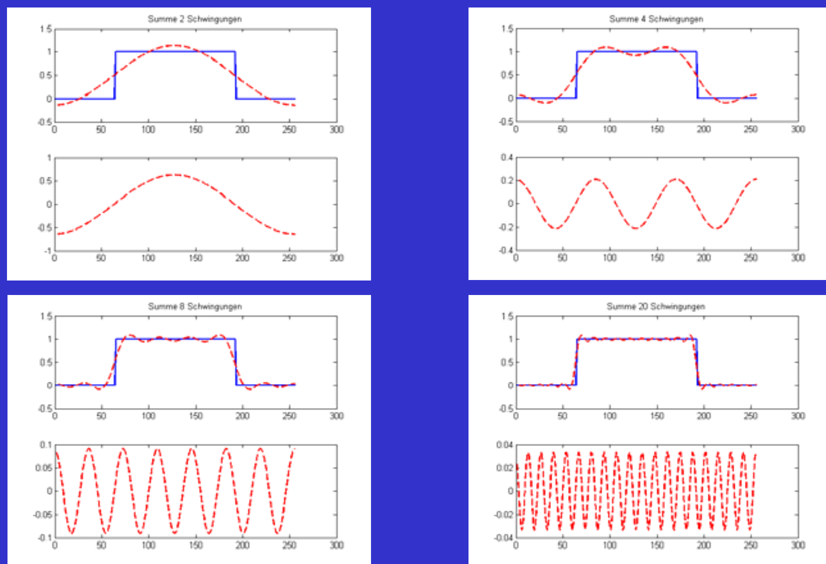


$y(t)=y_1(t)+y_2(t)$

Durch Addition von Schwingungen wird wieder ein periodisches Signal erzeugt.

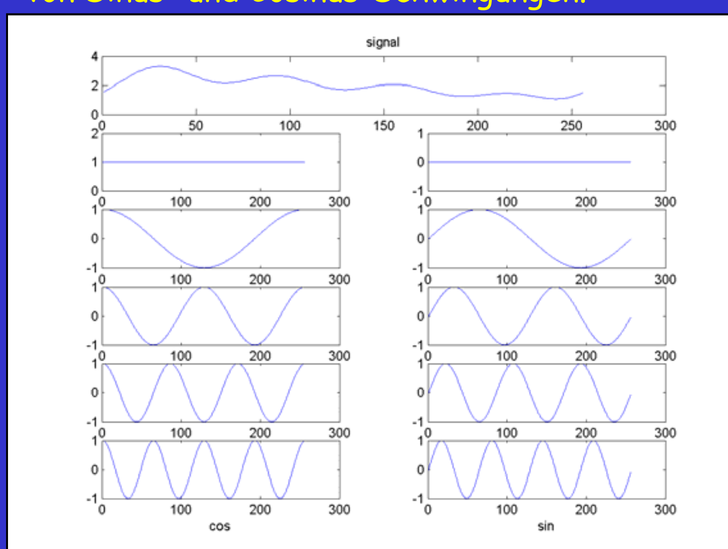
Backfrieder-Hagenberg

Rechteck als Summe von Schwingungen



Backfrieder-Hagenberg

Beliebiges periodisches Signal als Summe von Sinus- und Cosinus-Schwingungen.



Backfrieder-Hagenberg

Grundsätzliche Überlegung

- Alle Funktionen als Summe aus geraden und ungeraden Funktionen darstellbar
- Sinus und Cosinus sind ungerade und gerade Funktionen
- => alle Funktionen sind gewichtete Summe von Sinus + Cosinus

Backfrieder-Hagenberg

Analogie Vektorraum

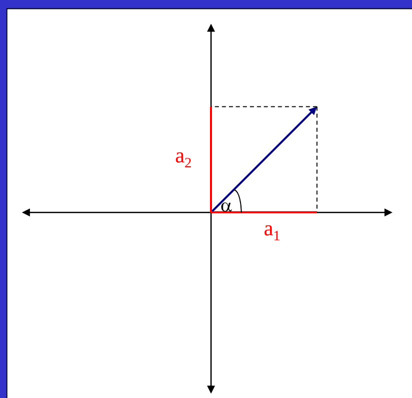
- Beliebiger Vektor $\vec{a}$ ist die Summe der Einheitsvektoren gewichtet mit Koeffizienten (Koordinaten).

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot \vec{e}_i$$

Backfrieder-Hagenberg

Koeffizienten (Koordinaten)

Die Koordinaten eines Vektors sind die Projektionen (inneres Produkt) auf die Einheitsvektoren.



$\vec{a}$

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}_i| \cos(\alpha)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1$$

Ähnlichkeit von Funktionen

(I)

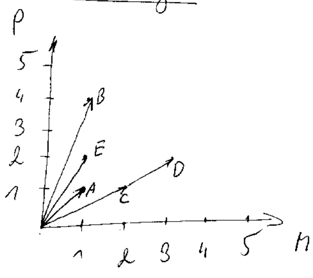
zu Fourieranalyse,

Frage: Wie bestimme ich die Ähnlichkeit zweier Funktionen?

1) Vergleich der Leistungen in Physik und Mathematik von 5 Schülern.

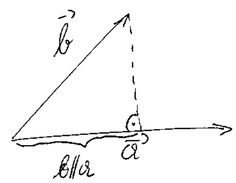
Pers	A	B	C	D	E
M	1	1	2	3	1
P	1	4	1	2	2

Visualisierung:



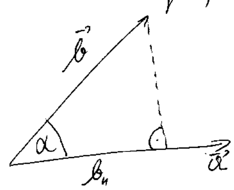
Person wird als Vektor visualisiert (definiert).

Das Problem des Vergleichs reduziert sich auf die Ähnlichkeiten von Vektoren.



Vektor $\vec{b}$ wird zusammengesetzt aus einer Komponente parallel $\parallel$ und einer normal $\perp$ zu $\vec{a}$.

ad Fourieranalyse,



$b_\parallel = |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

Ähnlichkeit bei inneren (skalaren) Produkt aus zwei Vektoren.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \;\hat{=}\; b_\parallel \text{, wenn } \underline{\underline{|\vec{a}| = 1}}$$

Beispiel:

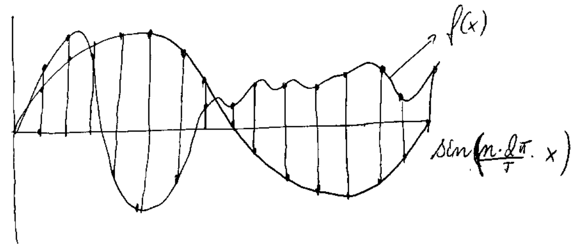
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 - 2 + 3 = \underline{\underline{9}}$$

allg.:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_N \cdot b_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot b_i$$

ad Fourier-Analyse

Konzept angewandt auf Funktionen:



Basisfunktion und $f(x)$ sind an N diskreten Stellen gegeben.

Werner Backfrieder — University of Applied Sciences Hagenberg — Folie 19

ad Fourier-Transformation

III

ad Fouriertransformation,

„Ähnlichkeitskoeffizient" α_n der Funktion $f(x)$ zur Basisfunktion $\sin(2\pi \frac{n}{N} \cdot x)$ wird durch das verallgemeinerte innere Produkt definiert:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi\, nk}{N}\right)$$

α_n beschreibt wie „stark" die Frequenz $\frac{2\pi n}{N}$ in der Funktion $f(x)$ enthalten ist.

Werner Backfrieder — University of Applied Sciences Hagenberg — Folie 20

Erweiterung auf gerade Komponenten, d.h. Bereich = Addierung von Cosinus Termen. ⇒ neue Basisfunktion:

$$e^{-2\pi i \frac{n\cdot k}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi n k}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n k}{N}\right)$$

$$\boxed{z_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-2\pi i \frac{nk}{N}}}$$

Diskrete Fouriertransformation.

Übergang zum kontinuierlichen Fall

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x}\, dx$$

↓

Komplexe Funktion

Verallgemeinertes Inneres Produkt

Dimension=N

$$a_i = \vec{a}\cdot\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{N} a_j e_{ij}$$

Kontinuierlicher Fall:
Summer durch Integral ersetzt

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt$$

Fourierreihe

Funktionen mit Periodendauer T, lassen sich durch eine Summe darstellen, wobei Sinus und Cosinus die Basisfunktionen bilden:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)$$

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(\omega_n t) dt$$

$$B_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin(\omega_n t) dt, \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

Komplexe Schreibweise

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

Identität

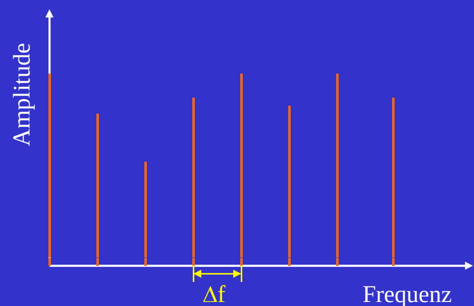
$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n e^{-i\omega_n t}$$

gerade+ungerade Funktionsteile

$$Z_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

komplexe Koeffizienten

Koeffizienten



Fourierreihe:
periodische Funktion
Periodendauer T =>
Diskretes Frequenzspektrum

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

Fouriertransformation:
T-> ∞
kontinuierliches Spektrum
Δf-> 0

Fouriertransformation

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

Fouriertransformation

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{2\pi i f t} df$$

inverse Fouriertransformation

- Transformation von Funktionen in die Frequenz-domäne (Funktionsymbole in Großbuchstaben) X(f)=F(x(t))
- Inverse Funktion: x(t)= $\mathcal{F}^{-1}$(X(f)
- Funktionspaare: $X(f) \overset{\mathcal{F}}{\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\leftrightarrow}} x(t)$

Funktionspaare

Zeitdomäne	Frequenzdomäne
1	$\delta(f)$
$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{sinc}(f)$
e^{-t^2}	e^{-f^2}
$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}(f)$
$\mathrm{comb}(t)$	$\mathrm{comb}(f)$

Eigenschaften

- Linearität

$$\mathcal{F}(a \cdot x(t) + b \cdot y(t)) = a \cdot X(f) + b \cdot Y(f)$$

- Translation

$$\mathcal{F}(x(t+T)) = e^{-2\pi i T} \cdot X(f)$$

- Skalierbarkeit

$$\mathcal{F}(x(t \cdot T)) = \frac{1}{T} X\left(\frac{f}{T}\right)$$