Zeitdiskrete Signale

- Faltungstheorem
- Diskrete Fouriertransformation (DFT)
- Abtasttheorem

Motivation

- Zeitdiskretes Signal, Signal nur an bestimmten Zeitpunkten t_n gegeben.
- $x_d(t)=x(t_n)$ n=0,1,2,.....
- Wie oft muß z.B. ein akustisches Signal abgetastet werden, daß zum analogen Signal kein hörbarer Unterschied besteht?

Faltung zweier Funktionen

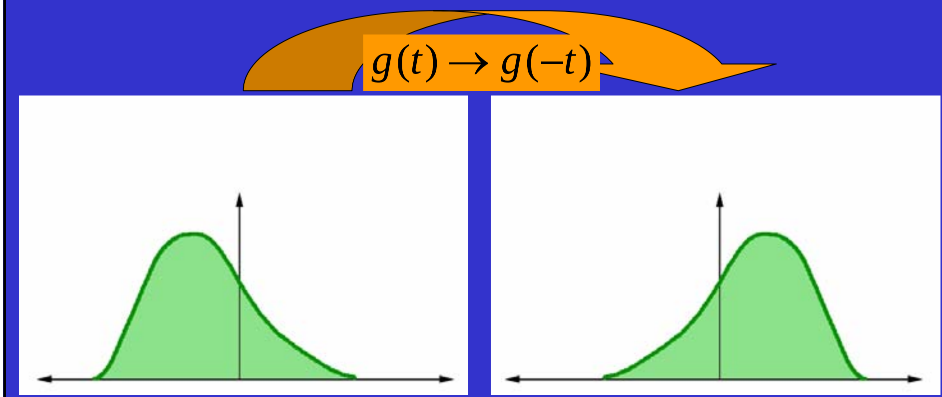
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t-t')dt'$$

Faltungskern

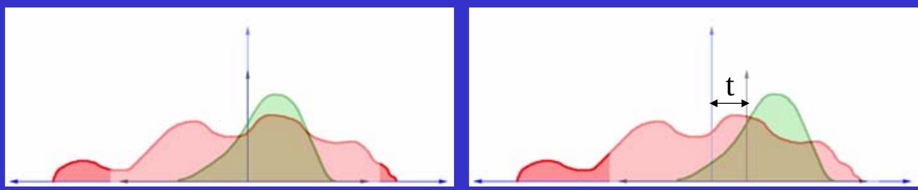
1. Spiegelung des Faltungskerns
2. Verschieben des Faltungskerns
3. Integration des Produktes aus f und g

Faltung: Spiegelung

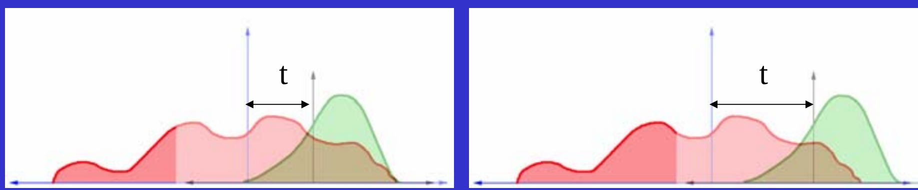
Faltungskern wird entlang der Zeitachse gespiegelt (! oft symmetrische Kerne)



Faltung: Verschieben+Multiplikation

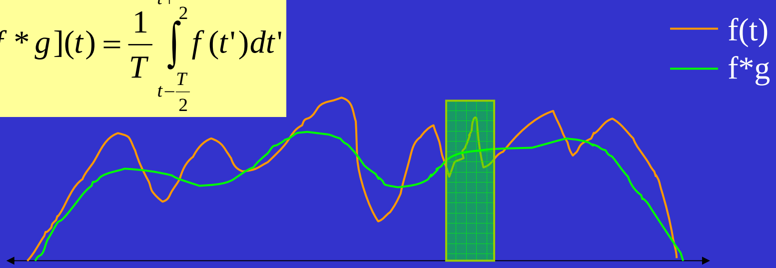


$$\rightarrow f(t')g(t-t')$$



Beispiel: Faltung mit Rechtecksfunktion

$$[f*g](t)=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(t')dt'$$



- Interpretation
  - Mittelwertbildung im Bereich des Rechteckes
  - Glättung = Tiefpaßfilter

Implementierung

- Diskretes Signal f_d der Länge N
- Faltungskern selbe Länge
- Berechnung eines Wertes von $f_d * g_d$
  N Multiplikationen + N Additionen
- Rechenaufwand für Faltung N^2

Faltungstheorem

- Faltung in der Zeitdomäne entspricht Multiplikation im Frequenzraum

Zeitdomäne	Frequenzraum
$f*g$	$F \cdot G$
Faltung	Multiplikation

Backfrieder-Hagenberg

Sampling

- Digitalisierung
- Zeitliche Digitalisierung
  - Signale werden in regelmäßigem Intervalen gespeichert (zeitliche Auflösung)

$$f_d(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

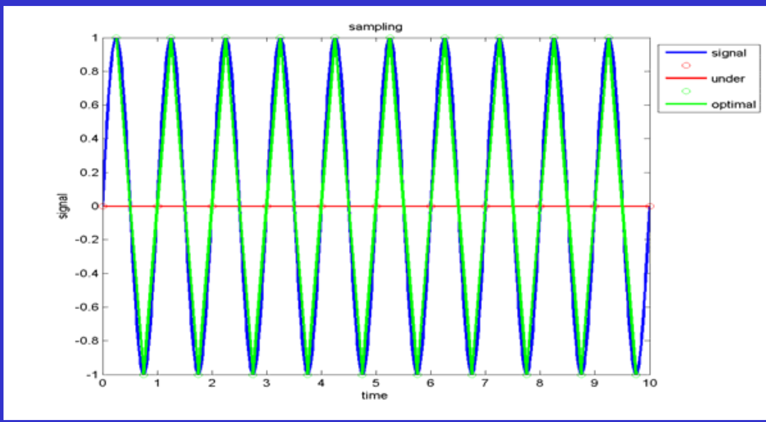
- Quantitative Digitalisierung
  - Signal wird quantisiert, d.h. Speichertiefe wird festgeleft
  - 8 Bit, 16 Bit

Wie oft abtasten?

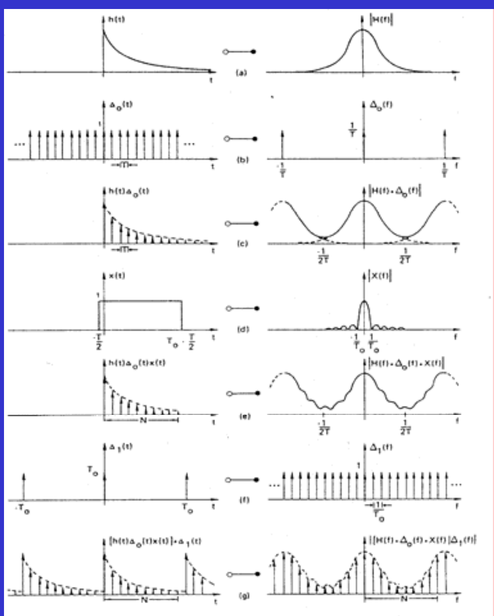
- Nyqist'sches Sampling Theorem:

Um ein Signal ohne Informations-verlust zu digitalisieren, muß die Abtastfrequenz doppelt so hoch wie die Grenzfrequenz gewählt werden.

Beispiel Sinus T=1s



Signal f=1/s (blau), under-sampling T=1s (rot), T=0.5s (grün)



kontinuierlich

Kammfunktion

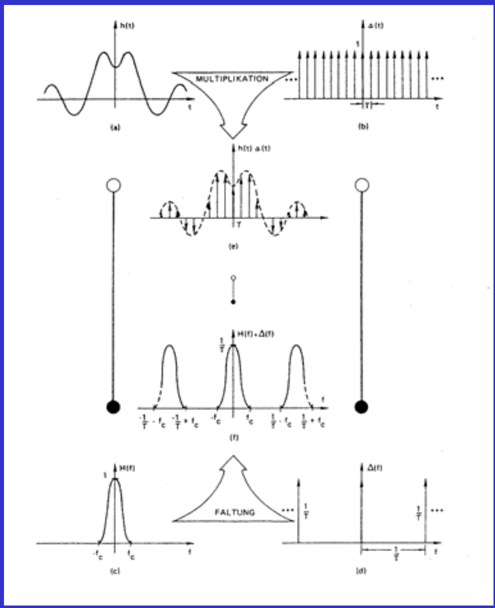
Aliasing

Zeit-Fenster

Rippling

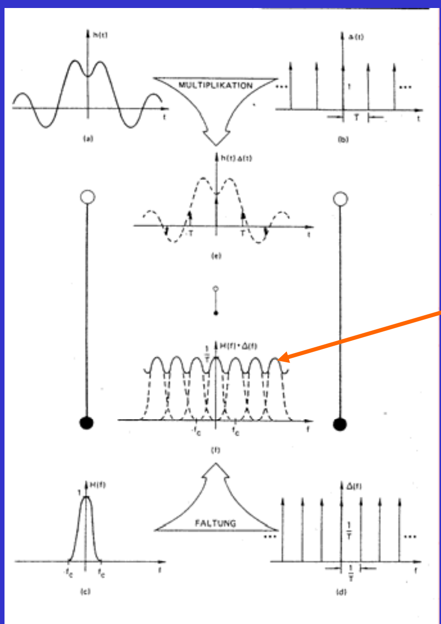
Frequenz-Kamm

Diskrete Fouriertransformation



Sampling: bandbegrenzte Funktion

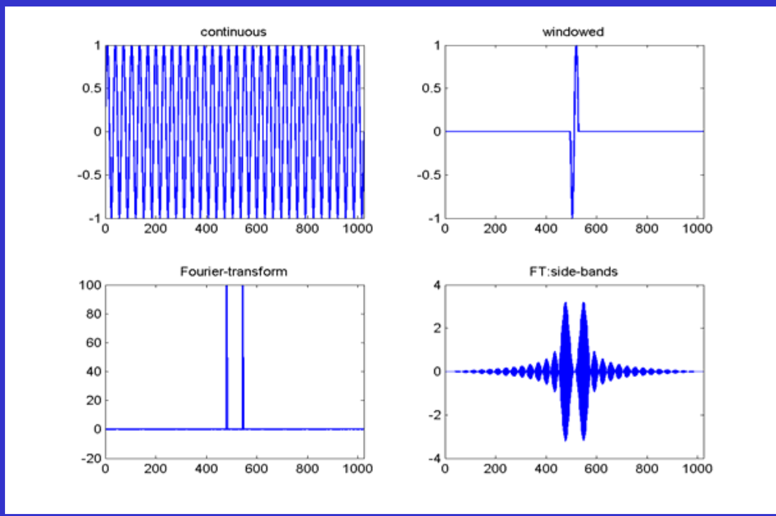
Backfrieder-Hagenberg



Undersampling

Backfrieder-Hagenberg

Diskrete Fouriertransformation (DFT): Fensterung



Backfrieder-Hagenberg

Diskussion

- Signal-Spektrum

$$x(t) = A \cdot \cos(f_0 t) \xleftrightarrow{FT} X(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0)$$

- Fenster

$$w(t) = rect(t / T_w) \xleftrightarrow{FT} T_w \operatorname{sinc}(\pi T_w f)$$

- Resultierendes Spektrum

$$X(f) = \frac{A}{2} T_w \operatorname{sinc}(\pi T_w (f - f_0)) + \frac{A}{2} T_w \operatorname{sinc}(\pi T_w (f + f_0))$$

- f=0, i.A. $X(0)<>0$!

- Spektrum diskret $f_m=m\Delta f$, spectral leakage
- Amplitude korrekt=> $f_0=n\Delta f$
- Fensterbreite: $T_w=1/(2f_0)$, $\Delta f=1/(2nT_w)$

Backfrieder-Hagenberg

Fenster: Kriterien

- Verhältnis Maxima Hauptband/Nebenbänder in dB
  - $dB=20*\log_{10}(U1/U2)$
- Roll-off Rate der Seitenbänder in dB/Oktave
- 3dB-Grenze im Hauptband, bezogen auf spektrales Sampling
- Maximaler Amplidudenfehler im Hauptband in dB

Backfrieder-Hagenberg

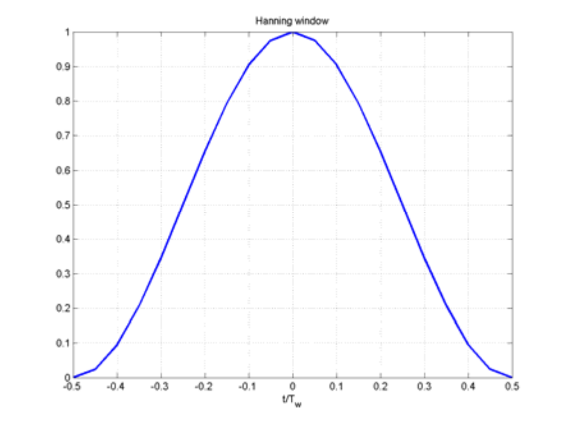
Window: Rechteck

- Maximum Seitenband: -13dB
- Roll-off: 6dB/Oktave
- 3dB-Bandbreite: 0.89
- Max. Sampling Fehler: 3.92dB

Backfrieder-Hagenberg

Hanning-Window

$$W_{Hann}(t) = \frac{1+\cos(2\pi / T_w t)}{2}$$

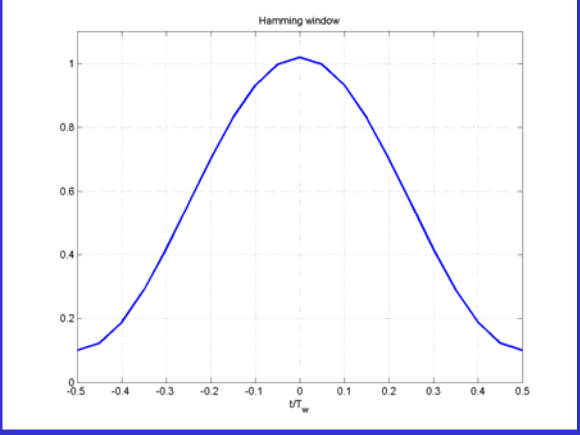


1. -32dB
2. 18 dB/Oktave
3. 1.44 Δf
4. 1.42 dB

Backfrieder-Hagenberg

Hamming-Window

$$w_{Hamm}(t) = 0.56 + 0.46\cos(2\pi / T_w t)$$



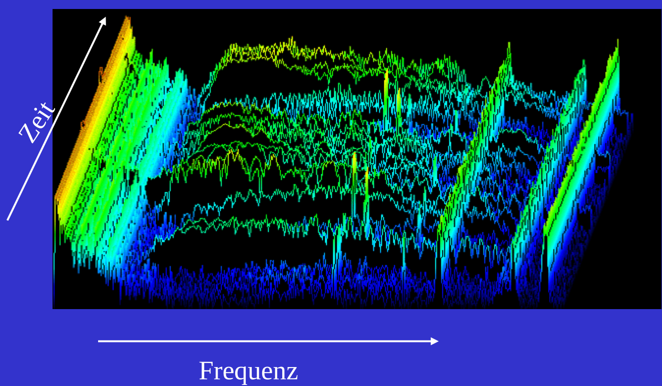
1. -43dB
2. 6dB/Oktave
3. 0.3 ΔF
4. 1.78dB

Backfrieder-Hagenberg

Spectrogramm

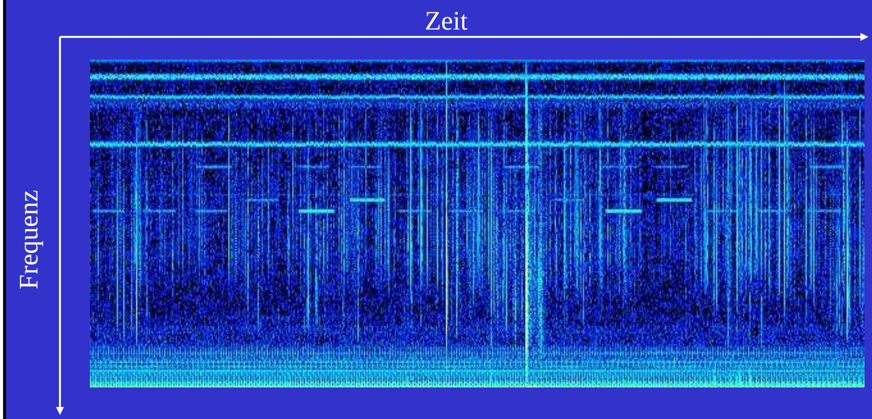
- Signalanalyse über lange Zeiträume
  - 24h EKG
  - EEG Schlaflabor
  - Spracherkennung
- 1min, fs=16kHz -> 636.000 Samples
  - Langwellige Phänomen: Biasshift ...
  - Kurzwellige Information interessant
    - z.B. Buchstaben, Oberwellen, ...
- Aufteilung in kurze Sequenzen -> FFT

Spectrogramm



- Spektren zeitlicher Untersequenzen
- Zeitliche Analyse des Frequenzganges
- Reliefplot nicht üblich

2D Spektrogramm, Wasserfalldiagram



- Den Amplituden der Frequenzen werden Farb- oder Grauwerte zugeordnet