Lineare Filter

SE:MED 4. Semester

Werner Backfrieder

Inhalte

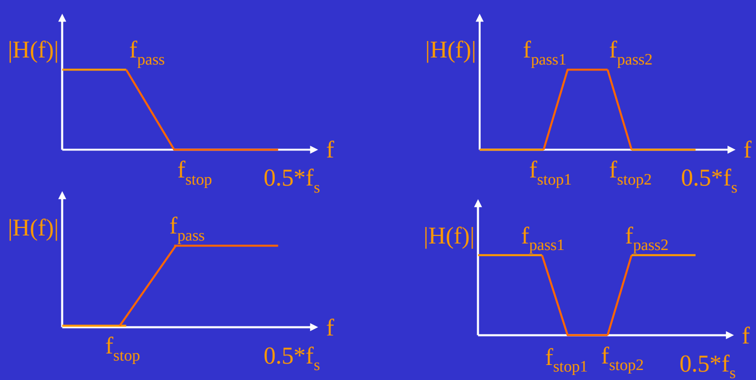
- Filtertypen
- Filter als lineare Systeme
- Impulsantwort, Modulationstransferfunktion (MTF)
- Filter Design
- Beispiel Butterworth-Filter

Digital Filter: Einführung

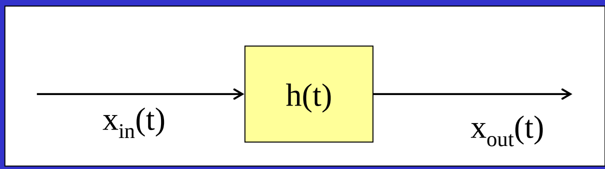
- Theorie der digitalen Filter ist seit Beginn der 70er Jahre bekannt.
- Leistungsfähigkeit der Hardware nicht gegeben, daher analoge LC oder RC Bausteine.
- Mit Einführung der Digitalen Signal Prozessoren (DSP), erfolgte der Durchbruch in der praktischen Anwendung.

Filter-Typen

- klassische Filter
  - Tiefpass-, Bandpass-, Hochpass-, Bandsperrfilter



Lineares System



- Filter wird durch Kern h(t) beschrieben
- Lineares System:
  $x_{out}(t)=h(t)*[x_1(t)+x_2(t)]=h(t)*x_1(t)+h(t)*x_2(t)$
- Zeitinvariant
  $x_{out}(t+d)=h(t+d)*x_{in}(t+d)=h(t)*x_{in}(t+d)$
- => LTI-System (Linear Time Invariant)

Darstellung

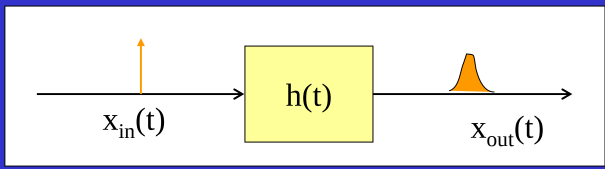
- Filtern ist selektive Dämpfung von Frequenzen
- Multiplikation des Spektrums mit Filterkern

$$X_m(f) = X(f) \cdot H(f)$$

- Faltung in der Zeitdomäne

$$x_m(t) = x(t) * h(t)$$

Impulsantwort



- Eingangssignal Dirac-Impuls $\delta(t-t_0)$

$$\delta(t-t_0) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t'-t_0) h(t-t') dt' = h(t-t_0)$$

- Ausgangssignal Systemantwort $h(t-t_0)$

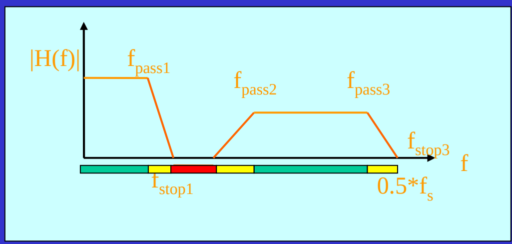
Modulationstransferfunktion (MTF)

- Fouriertransformation eines Linearen Systems

$$F[x*h](f) = X(f) \cdot H(f)$$
$$F[\delta * h](f) = 1 \cdot H(f)$$
$$\left|F[\delta * h](f)\right| = \left|H(f)\right| = \left|H(f) \cdot H^*(f)\right| = MTF$$

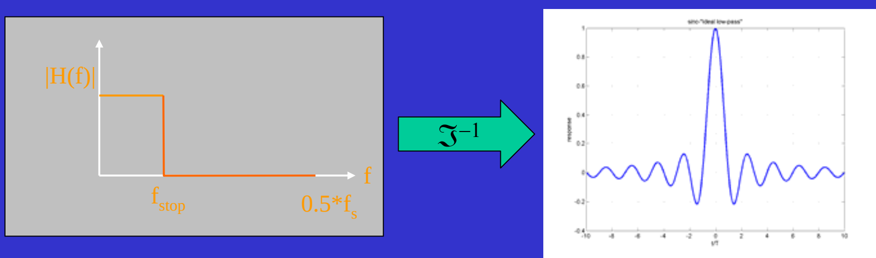
- MTF eines Systems gibt an wie stark einzelne Frequenzen übertragen werden
- MTF ist Absolutbetrag der Fourier-transformierten der Impulsantwort

Schematischer Amplitudengang



- Parameter
  - f_{pass} Durchlassfrequenz
  - f_{stop} Sperrfrequenzen
- Bereiche
  - Durchgangs-, Übergangs- und Sperrbereiche

Warum Übergangsbereiche?



- Idealer Bandpass ist rechteckig
- Entspricht *sinc()* in Zeitdomäne =>
  - nicht begrenzt=unendliche Ordnung
  - nicht kausal (= beginnt bei $-\infty$)

Fenstermethode

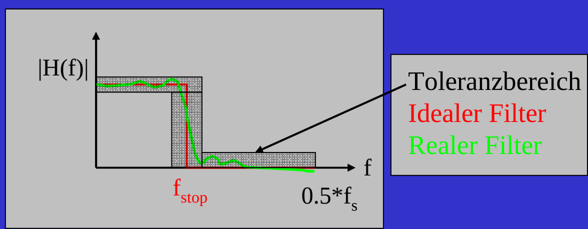
- Eckfrequenzen der idealen rechteckigen Filterfunktion festlegen
- Berechnen der Idealen Systemantwort ($\mathfrak{I}^{-1}$)
  - unendlich lang, nicht kausal (nicht realisierbar)
- Multiplizieren mit geeigneter Fensterfunktion

$$h_w(t) = h(t) \cdot w(t)$$

- Verschieben der Impulsantwort, sodass kausales Signal entsteht

Backfrieder-Hagenberg

Konsequenzen



- Multiplikation mit Fenster w(t) =
- Faltung mit Fouriertransformierter
  - rippling
  - Abfallen der Flanken => Übergangsbereich
- Effekte ergeben Toleranzbereich, der im Filterdesign festgelegt wird

Backfrieder-Hagenberg

Butterworth-Filter

- 2 Parameter
  - Cut-off frequency f_c
  - Ordnung n
- Tiefpaß

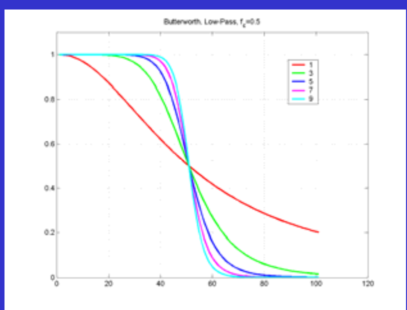
$$k(f) = \frac{1}{1 + (f / f_c)^{2n}}$$

- Hochpaß

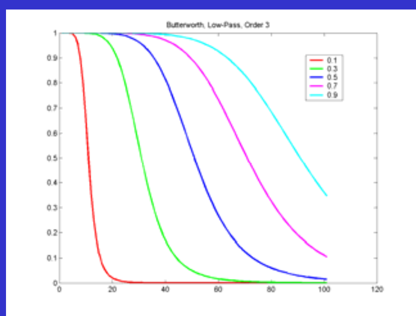
$$k(f) = \frac{1}{1 + (f_c / f)^{2n}}$$

Butterworth-Low: Order, Cut-off

$$k(f) = \frac{1}{1 + (f / f_c)^{2n}}$$



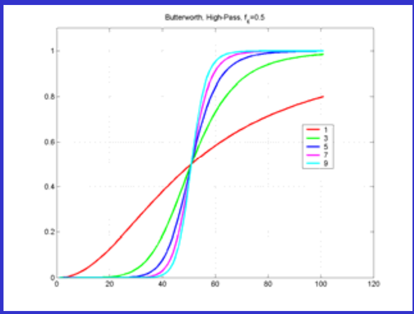
order



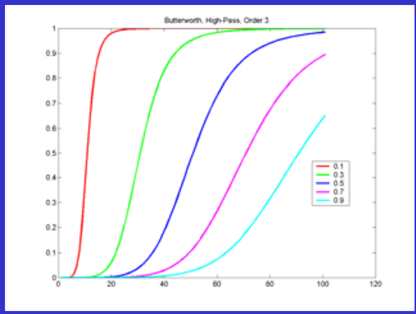
cut-off

Butterworth-High: Order, Cut-off

$$k(f) = \frac{1}{1 + (f_c / f)^{2n}}$$



order



cut-off