

2 Einteilung von Signalen

In elektrischen Übertragungssystemen werden Signale durch elektrische Größen wie Spannungen und Ströme dargestellt. In einer allgemeinen Theorie der Signalübertragung arbeitet man zweckmäßigerweise mit Signalen $s(t)$, deren physikalische Dimension nicht von vornherein festgelegt ist. Es gilt lediglich

$$s(t) = \text{Funktion der Zeit } t.$$

Signale $s(t)$ sind als Träger von Sprache, Daten usw. üblicherweise reellwertige Funktionen der reellen Zeit t . Für manche Betrachtungen ist es aber sehr hilfreich und bequem, wenn man auch komplexwertige Signale $\underline{s}(t)$ der reellen Zeit t zulässt. Ein solcher Fall, der grundsätzliche Bedeutung hat, wird später in Abschnitt 5.1 auftreten. Komplexe Signale lassen sich stets durch Realteilbildung in reelle Signale überführen. In diesem Text bleiben die meisten Betrachtungen auf reelle Signale beschränkt.

Signale lassen sich aufgrund verschiedener Eigenschaften in Klassen einteilen. Kriterien der Einteilung sind:

- a) Definitions- und Wertebereich
- b) Energie und Leistung

Die Übertragung über räumliche Entfernungen erfordert Signale mit nicht verschwindender Energie oder nicht verschwindender mittlerer Leistung. Die Definition dieser Größen bei nicht festgelegter physikalischer Dimension bringt Abschnitt 2.2.

2.1 Diskrete und kontinuierliche Signale

Eine erste Einteilung von Signalen läßt sich, wie bei Funktionen, hinsichtlich ihres Definitions- und Wertebereichs vornehmen [2]. Ist der Funktionswert s nur für diskrete (übli-

2 Einteilung von Signalen

cherweise äquidistante) Zeitpunkte t_ν ; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ definiert, dann nennt man das Signal *zeitdiskret*. Ist der Funktionswert s für jeden Punkt t eines kontinuierlichen Zeitbereichs definiert, dann nennt man das Signal *zeitkontinuierlich*. Entsprechend bezeichnet man das Signal als *wertdiskret* bzw. *wertkontinuierlich*, wenn der Wertebereich für s diskret bzw. kontinuierlich ist.

Bezüglich der Eigenschaft diskret und kontinuierlich unterscheidet man also als vier Signalarten

- zeitkontinuierliche wertkontinuierliche Signale
- zeitdiskrete wertkontinuierliche Signale
- zeitkontinuierliche wertdiskrete Signale
- zeitdiskrete wertdiskrete Signale.

Die Signalart (a) benennt man auch kurz als *analoge* Signale und die Signalart (d), wenn nur endlich viele verschiedenen Funktionswerte zugelassen sind, als *digitale* Signale. Für die Anwendung sind analoge und digitale Signale am wichtigsten. Bild 2.1 zeigt je ein Beispiel für die Signalarten (a) bis (d). Man beachte, daß bei den zeitdiskreten Signalen in den Bildern b und d die Funktionswerte zwischen den diskreten Zeitpunkten t_ν nicht null sind, sondern undefiniert. Diesen Zwischenzeitpunkten ist also gar kein Funktionswert zugeordnet, auch nicht der Wert Null.

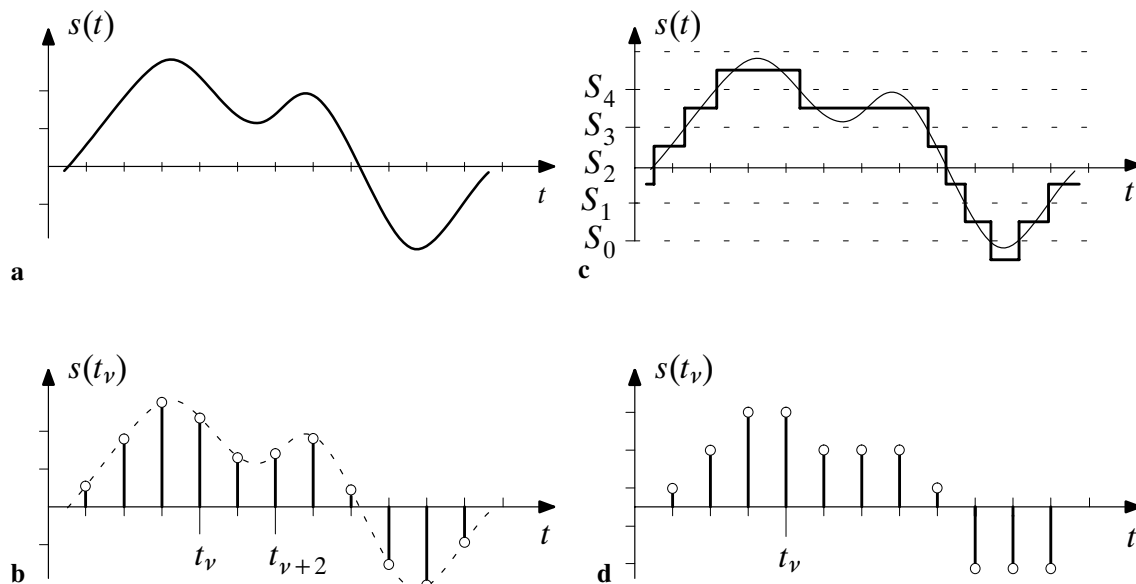


Bild 2.1 Signalarten
a zeitkontinuierlich wertkontinuierlich (analog)
b zeitdiskret wertkontinuierlich
c zeitkontinuierlich wertdiskret
d zeitdiskret wertdiskret (digital)

Ein (reelles) zeitdiskretes wertkontinuierliches Signal ist identisch mit einer Folge von (reellen) Zahlen [2]. Man kann sich eine solche (äquidistante) Folge durch (mathematische) *Abtastung* eines analogen Signals an äquidistanten Zeitpunkten entstanden denken. Der umgekehrte Vorgang der Gewinnung eines analogen Signals aus einer Folge heißt *Interpolation*. In Kapitel 9 wird gezeigt, daß dies ohne Fehler möglich ist, wenn das sogenannte Abtasttheorem erfüllt wird.

Ein zeitkontinuierliches wertdiskretes Signal kann man sich durch *Quantisierung* eines analogen Signals entstanden denken. Eine Quantisierung ist mit Hilfe von Schwellen S_k durchführbar, indem man den diskreten Funktionswert \bar{S} z. B. nach folgender Vorschrift bildet

$$\bar{S} = \frac{1}{2}(S_k + S_{k+1}) \quad \text{für} \quad S_k < s(t) \leq S_{k+1}. \quad (2.1)$$

Den umgekehrten Vorgang der Gewinnung eines analogen Signals aus einem zeitkontinuierlichen wertdiskreten Signal bezeichnet man als *Glättung*. Im Unterschied zur Operationsfolge "Abtastung, Interpolation", bei welcher das analoge Signal in bestimmten Fällen fehlerfrei wiedergewonnen werden kann, ist mit der Operationsfolge "Quantisierung, Glättung" das analoge Signal nicht fehlerfrei wiedergewinnbar. Es bleibt ein Quantisierungsfehler. Dieser ist als überlagerte Störung interpretierbar und wird auch Quantisierungsrauschen genannt.

Ein digitales Signal ist als Folge ganzer Zahlen darstellbar. Man kann es sich durch Abtastung und Quantisierung eines analogen Signals entstanden denken. Dabei ist die Reihenfolge von Abtastung und Quantisierung gleichgültig, d. h. man kann erst abtasten und dann quantisieren oder erst quantisieren und dann abtasten [3]. Das Ergebnis ist eine analog-digital-Umsetzung, kurz ADU. Den umgekehrten Vorgang nennt man digital-analog-Umsetzung, kurz DAU.

Die Signalbeispiele in Bild 2.1 sind zusammenfassend durch folgende Operationen miteinander verknüpft

- (a) → (b) : Abtastung
- (a) → (c) : Quantisierung
- (a) → (d) : ADU
- (d) → (a) : DAU
- (c) → (a) : Glättung
- (b) → (a) : Interpolation.

Die Pfeilrichtung weist von der Ausgangssituation zur Ergebnissituation.

Die Anzahl M der möglichen diskreten Funktionswerte ist bei digitalen Signalen endlich, $M < \infty$. Man nennt das digitale Signal für

2 Einteilung von Signalen

$M=2$:	binär
$M=3$:	ternär
$M=4$:	quaternär
$M=8$:	okternär
allgemein:		M -är.

Beim binären Digitalsignal werden die beiden möglichen Funktionswerte unabhängig von ihrer wirklichen Größe auch durch die Zeichen 0 und 1 ausgedrückt und *Bit* (von binary digit) genannt.

2.2 Energie- und Leistungssignale

Eine zweite Art der Einteilung von Signalen orientiert sich zweckmäßigerweise an den Begriffen Energie und mittlere Leistung, weil jede physikalische Signalübertragung Energie bzw. Leistung erfordert.

2.2.1 Energiesignale

Die im Zeitintervall $t_1 \leq t \leq t_2$ gelieferte elektrische Energie E_{el} berechnet sich allgemein gemäß (2.2)

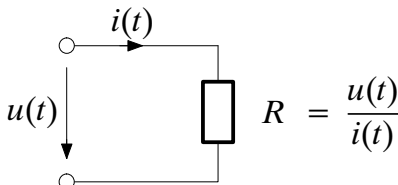

$$E_{el} = \int_{t_1}^{t_2} u(t) \cdot i(t) dt . \quad (2.2)$$

Bild 2.2 Spannung und Strom
beim ohmschen Widerstand

Aus (2.2) folgt für die in einen ohmschen Widerstand R eingespeiste elektrische Energie

$$E_{el} = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt. \quad (2.3)$$

Die Energie ist also proportional dem Integral über eine quadrierte Zeitfunktion. Das legt die folgenden Definitionen nahe:

Definition : *Signalenergie*

Die (mathematische) Energie eines zeitkontinuierlichen Signals $s(t)$ nicht festgelegter physikalischer Dimension ist bestimmt durch

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt . \quad (2.4)$$

Falls $s(t)$ nicht auf der gesamten t -Achse definiert ist, dann ist das Integral über sämtliche Zeitintervalle zu erstrecken, in denen $s(t)$ definiert ist.

Wenn ein Signal z.B. die (physikalische) Dimension Spannung hat, dann hat die Signalenergie die Dimension Spannungsquadrat mal Zeit.

Definition : *Energiesignal*

$s(t)$ ist Energiesignal, wenn es folgender Ungleichung genügt

$$0 < E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt < \infty . \quad (2.5)$$

Ein Energiesignal $s(t)$ ist also eine quadratintegrale Funktion und besitzt eine nicht verschwindende (mathematische) Energie E . Die Definition des Energiesignals ist uneinheitlich. Manche Autoren lassen auch $E = 0$ zu. Die Definition (2.5) wird nun anhand der in Bild 2.3 dargestellten Signalbeispiele erläutert.

Der Rechteckimpuls in Bild 2.3a ist ein Energiesignal der Energie $E = A^2T$.

Der Rechteckimpuls in Bild 2.3b hat unabhängig von a und θ die Fläche 1. Für $\theta \rightarrow \infty$ geht er in den Dirac-Impuls $\delta(t)$ über, sofern a endlich ist, siehe auch Bild 1.9. Die Energie des Impulses in Bild 2.3b berechnet sich zu

$$E = \frac{1}{4a^2} \theta^2 \cdot \frac{2a}{\theta} = \frac{1}{2a} \theta \rightarrow \infty \quad \text{für } \theta \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad 0 < a < \infty . \quad (2.6)$$

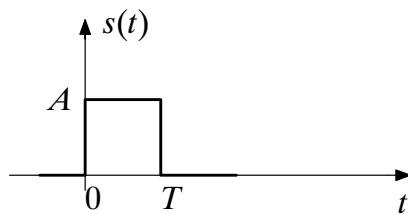
Weil für $\theta \rightarrow \infty$ auch $E \rightarrow \infty$ geht, ist der Dirac-Impuls $\delta(t)$ kein Energiesignal. Der Übergang $\theta \rightarrow \infty$ bewirkt also einen Qualitätswechsel, vergl. Bilder 1.7b und 1.10.

Das Gleichsignal in Bild 2.3c ist nicht Energiesignal, weil

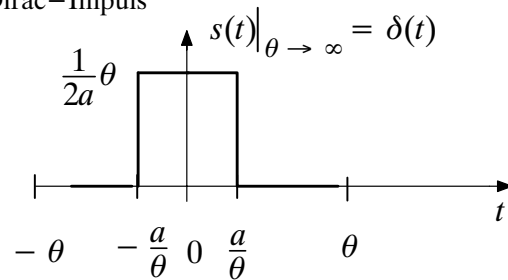
$$E = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt = \lim_{\theta \rightarrow \infty} A^2 \int_{-\theta}^{\theta} dt \rightarrow \infty . \quad (2.7)$$

2 Einteilung von Signalen

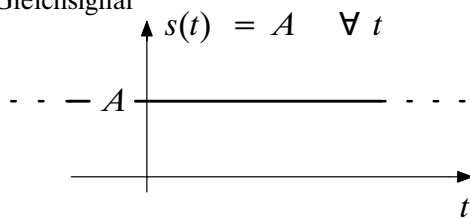
a Rechteckimpuls



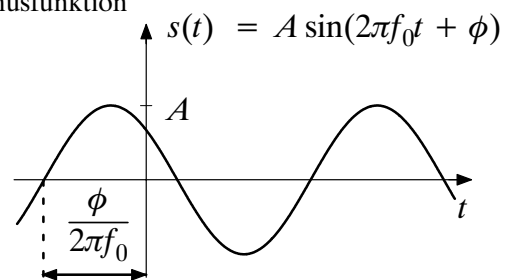
b Dirac-Impuls



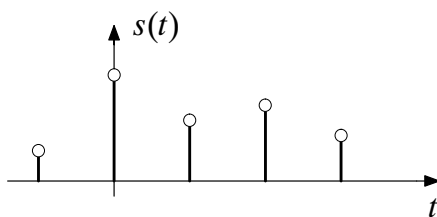
c Gleichsignal



d Sinusfunktion



e zeitdiskretes Signal



f Exponentialfunktion

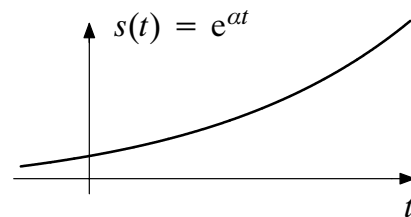


Bild 2.3 a–f Signalbeispiele zur Illustration der Definitionen in (2.5) und (2.13)

Bild a zeigt ein Energiesignal, die Bilder b, c und d zeigen Leistungssignale, die Bilder e und f zeigen Beispiele, die weder Energiesignale noch Leistungssignale sind

Die Sinusschwingung in Bild 2.3d ist nicht Energiesignal, weil

$$E = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(2\pi f_0 t + \phi) dt = \lim_{\theta \rightarrow \infty} A^2 \int_{-\theta}^{\theta} \sin^2(2\pi f_0 t + \phi) dt \rightarrow \infty . \quad (2.8)$$

Beim zeitdiskreten Signal in Bild 2.3e ist das Integral (2.5) nur über die diskreten Zeitpunkte des Definitionsbereichs von $s(t)$ zu bilden. Dabei ergibt sich $E = 0$. Das zeitdiskrete Signal ist also nicht Energiesignal im Sinne von (2.5). Die physikalische Übertragung zeitdiskreter Signale erfordert deshalb eine sogenannte Leitungscodierung, siehe Abschnitt 2.3. Die (stillschweigende) Voraussetzung einer Leitungscodierung gestattet dann später in Abschnitt 7.1 eine sinnvolle Neudefinition der Energie eines zeitdiskreten Signals.

Die Exponentialfunktion in Bild 2.3f ist nicht Energiesignal, weil

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\alpha t} dt = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_{-\theta}^{\theta} e^{2\alpha t} dt = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha t} \right|_{t = -\theta}^{\theta} \rightarrow \infty . \quad (2.9)$$

2.2.2 Leistungssignale

Die im Intervall $-\theta \leq t \leq +\theta$ umgesetzte mittlere elektrische Leistung berechnet sich allgemein zu

$$P_{el} = \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{+\theta} u(t) \cdot i(t) dt . \quad (2.10)$$

Daraus folgt für die im ohmschen Widerstand R umgesetzte mittlere Leistung

$$P_{el} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{+\theta} u^2(t) dt = R \cdot \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{+\theta} i^2(t) dt . \quad (2.11)$$

Diese letzte Beziehung (2.11) legt, wenn man auf ein unendlich langes Zeitintervall übergeht, die folgenden Definitionen nahe:

Definition : *Mittlere Signalleistung*

Die (mathematische) mittlere Leistung eines zeitkontinuierlichen Signals $s(t)$ nicht festgelegter Dimension ist bestimmt durch

$$P = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{+\theta} s^2(t) dt . \quad (2.12)$$

Falls $s(t)$ nicht auf der gesamten t -Achse definiert ist, dann ist das Integral über sämtliche Zeitintervalle zu erstrecken, in denen $s(t)$ definiert ist. Die Mittelung ist unabhängig davon über die gesamte Zeitachse zu nehmen.

Wenn das Signal z.B. die (physikalische) Dimension Spannung hat, dann hat die mittlere Leistung die Dimension Spannungsquadrat.

Definition: *Leistungssignal*

$s(t)$ (z. B. Spannung oder Strom) ist ein Leistungssignal, wenn es folgender Ungleichung genügt:

$$0 < P = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{+\theta} s^2(t) dt < \infty. \quad (2.13)$$

Ein Leistungssignal $s(t)$ setzt in einem unendlich langen Zeitintervall eine nichtverschwindende endliche mittlere (mathematische) Leistung P um.

Ein Leistungssignal ist kein Energiesignal (für ein solches geht $E \rightarrow \infty$) und ein Energiesignal ist kein Leistungssignal (für ein solches ist $P=0$).

Die Definition (2.13) wird nun anhand der in Bild 2.3 dargestellten Signalbeispiele näher erläutert.

Der Rechteckimpuls in Bild 2.3a ist nicht Leistungssignal, weil sich dafür $P = 0$ ergibt.

Der Dirac-Impuls in Bild 2.3b ist ein Leistungssignal, wie folgende Überlegung zeigt: Nach (2.6) ist für einen endlichen Wert von a die Energie $E = \theta/2a$. Die auf das Intervall der Breite 2θ bezogene mittlere Leistung ist damit unabhängig von θ , jedoch abhängig von a .

$$P = \frac{E}{2\theta} = \frac{1}{4a}, \text{ d.h. } 0 < P < \infty \quad \text{für} \quad 0 < a < \infty. \quad (2.14)$$

Der für $\theta \rightarrow \infty$ entstehende Dirac-Impuls $\delta(t)$ hat also eine von a abhängige nichtverschwindende endliche mittlere Leistung. Zur Abhängigkeit von a siehe auch Abschnitt 2.5.

Das Gleichsignal in Bild 2.3c ist ein Leistungssignal der Leistung $P = A^2$. Bemerkenswert ist der Unterschied zum Dirac-Impuls. Während der Dirac-Impuls eine endliche Fläche einschließt, bildet das Gleichsignal eine unendliche Fläche. In den späteren Kapitel 4 und 10 wird gezeigt, daß die sogenannte Fourier – Transformation das Gleichsignal in einen spektralen Dirac-Impuls und den Dirac-Impuls in ein spektrales Gleichsignal überführt.

Die Sinusschwingung in Bild 2.3d ist ein Leistungssignal, dessen mittlere Leistung nur von der Amplitude A abhängt, nicht aber von der Nullphase ϕ .

$$P = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2\theta} \int_{-\theta}^{+\theta} \sin^2(2\pi f_0 t + \phi) dt = \frac{1}{2} A^2. \quad (2.15)$$

Für das zeitdiskrete Signal in Bild 2.3e ist das Integral (2.13) nur über die diskreten Zeitpunkte des Definitionsbereichs von $s(t)$ zu bilden. Dabei ergibt sich $P = 0$. Das zeitdiskrete Signal ist also nicht Leistungssignal im Sinne von (2.13), vergl. Text auf S.30 unten.

Die Exponentialfunktion in Bild 2.3f ist nicht Leistungssignal, weil

$$P = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{+\theta} s^2(t) dt = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha t} \Big|_{t=-\theta}^{\theta} \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

2.3 Physikalische Darstellung von Digitalsignalen

Zeitdiskrete Signale und Digitalsignale, die gemäß Bild 2.1b und d nur Folgen mathematischer Funktionswerte (Impulse ohne Fläche) darstellen, sind weder Energie– noch Leistungssignale, wenn man sie nach den für zeitkontinuierliche Signale aufgestellten Kriterien (2.5) und (2.13) beurteilt. Solche Folgen sind Abstraktionen, die aber eine große praktische Bedeutung haben, und zwar gleichermaßen für numerische Berechnungen wie auch für theoretische Untersuchungen, siehe auch Kapitel 6 bis 8. In Kapitel 7 werden deshalb speziell für Folgen modifizierte Definitionen für Energie und mittlere Leistung eingeführt.

Um digitale Signale physikalisch darstellen und übertragen zu können, z.B. durch zeitkontinuierliche elektrische Spannungsverläufe, müssen den Funktionswerten Symbole oder Grundimpulse nichtverschwindender aber endlicher Energie entsprechend (2.4) zugeordnet werden. Bei endlich langen Symbolfolgen erhält man dann Energiesignale im Sinne von (2.5), bei unendlich langen Symbolfolgen Leistungssignale im Sinne von (2.13). Ein dynamisches Übertragungssystem liefert nämlich keine Reaktion, wenn die Energie der Erregung null ist. Das wird in Abschnitt 3.3 für lineare zeitinvariante Übertragungssysteme allgemein gezeigt, vergl. auch (1.56).

2.3.1 Leitungscodierung

Ein binäres Digitalsignal, dessen Information durch Folgen von 0 und 1 ausgedrückt wird, läßt sich physikalisch z. B. durch die in Bild 2.4 gezeigten Funktionsverläufe darstellen. Als Grundimpuls sind Rechtecke gewählt, die im Fall der NRZ–Signale (von non return to zero) die Dauer des Symbolabstands T , im Fall der RZ–Signale (von return to zero) eine kürzere Dauer haben. Im unipolaren Fall werden 1 und 0 durch Impuls und Nichtimpuls, im bipolaren Fall durch positiven und negativen Impuls dargestellt.

Unipolare Signale sind für die Signalverarbeitung in logischen Schaltungen geeignet, bipolare Signale für die Übertragung über größere räumliche Entfernungen. Im letzteren Fall erweist es sich überdies oft als günstiger, andere als rechteckige Grundimpulsformen zu verwenden.

Wird der einzelne Grundimpuls mit $g(t)$ bezeichnet, dann läßt sich das Digitalsignal allgemein durch

2 Einteilung von Signalen

$$s(t) = \sum_{\nu} a_{\nu} g(t - \nu T) \quad (2.17)$$

ausdrücken. Beim Energiesignal durchläuft der Zählindex ν ein endliches Intervall ganzer Zahlen (z.B. von $\nu = -N$ bis $\nu = +N$), beim Leistungssignal ein unendliches Intervall ganzer Zahlen. T bezeichnet den Abstand der Grundimpulse oder Symbole.

Zeitfunktion	Bezeichnung
	Unipolar NRZ Einfachstrom
	Bipolar NRZ Doppelstrom
	Unipolar RZ
	Bipolar RZ

Bild 2.4 Einige physikalische Darstellungen binärer Digitalsignale

Digitalsignale gemäß (2.17) sind hinsichtlich der Information, die sie tragen, zeitdiskret. Ihre physikalische Darstellung ist aber zeitkontinuierlich.

Die Koeffizienten a_{ν} sind Elemente einer vorgegebenen Wertemenge. Dabei gilt beispielsweise für

- binär unipolar $a_{\nu} \in \{0, 1\}$,
- binär bipolar $a_{\nu} \in \{-1, 1\}$,
- quaternär bipolar $a_{\nu} \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

Die Energie eines einzelnen Grundimpulses bestimmt sich zu

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt. \quad (2.18)$$

Wenn benachbarte Grundimpulse sich nicht überlappen, dann berechnet sich die Gesamtenergie eines digitalen Energiesignals aus der Summe der Energien aller Symbole.

Bei $2N+1$ aufeinanderfolgenden binären bipolaren sich nicht überlappenden Symbolen berechnet sich die auf die Intervalldauer $(2N+1)T$ bezogene mittlere Leistung zu

$$P = \frac{E_g}{T} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt. \quad (2.19)$$

(2.19) gilt auch für $N \rightarrow \infty$, d.h. für die mittlere Leistung eines binären bipolaren Leistungssignals.

Im Integrand steht das Quadrat eines einzelnen zeitbegrenzten Grundimpulses $g(t)$, nicht das Quadrat des gesamten Leistungssignals (2.17). Deshalb genügt die Division durch den einfachen Symbolabstand T .

Die meisten Digitalsignale machen von nur einer einzigen Grundimpulsform $g(t)$ Gebrauch. Es gibt allerdings auch wichtige Anwendungsfälle, bei denen das Digitalsignal aus mehr als nur einer Grundimpulsform gebildet wird. Dazu gehören beispielsweise FSK-Signale, das sind Digitalsignale, die durch Umtastung der Frequenz von Sinuswellenabschnitten der Dauer T erzeugt werden.

2.3.2 Besonderheiten digitaler Signale

Es gilt allgemein die folgende wichtige Aussage:

Jedes digitale Signal ist umwandelbar (umcodierbar) in ein binäres Signal.

Diese Eigenschaft digitaler Signale wird nun an Beispielen demonstriert, wobei zugleich noch weitere Sachverhalte erläutert werden.

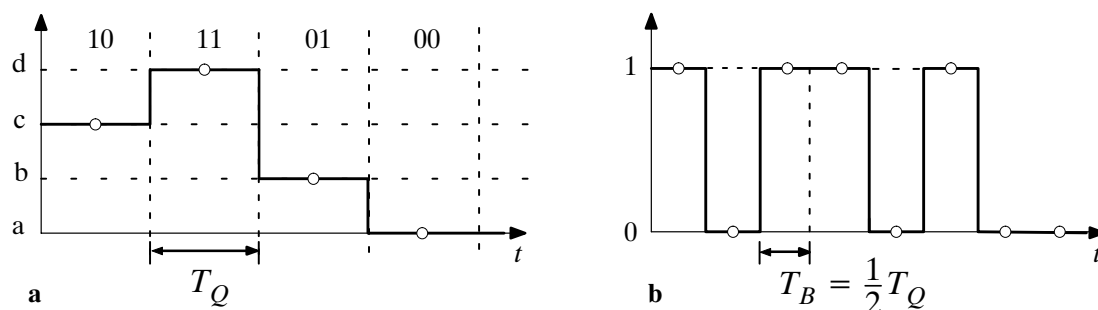


Bild 2.5 a Quaternäres NRZ-Signal
b Äquivalentes binäres NRZ-Signal

2 Einteilung von Signalen

Den quaternären Symbolen in Bild 2.5 a werden binäre Codewörter, die sich aus jeweils zwei Bits (sogenannten Dibits) zusammensetzen, gemäß Tabelle 2.1 zugeordnet. Da sich mit zwei Bits genau vier verschiedene Codewörter (Kombinationen) bilden lassen, bezeichnet man diesen Code als vollständig.

Tabelle 2.1

quaternäres Symbol	binäres Codewort
a	0 0
b	0 1
c	1 0
d	1 1

0 }
 1 } Bit

{
 vollständiger Code

Definition: *Symbolrate*

Die Symbolrate (oder Schrittgeschwindigkeit) v_s ist definiert als Reziprokwert der Dauer T_{\min} des kürzesten Symbols.

$$v_s = \frac{1}{T_{\min}} \text{ Baud .} \quad (2.20)$$

Die Einheit Baud leitet sich von dem Namen des französischen Telegraphentechnikers Baudot ab.

In Bild 2.5 ist die Symboldauer T_B des binären Signals halb so groß gewählt worden wie die Symboldauer T_Q des quaternären Signals, weil auf diese Weise mit beiden Signalen die gleiche Informationsmenge pro Zeitintervall T_Q übertragen wird. Beim quaternären Signal ist $T_{\min} = T_B = T_Q/2$. Für die Symbolraten des quaternären Signals v_{SQ} und des binären Signals v_{SB} gilt damit

$$v_{SB} = \frac{1}{T_B} = \frac{2}{T_Q} = 2 \cdot v_{SQ} . \quad (2.21)$$

Die Tatsache, daß mit beiden Signalen des Bildes 2.5 die gleiche Informationsmenge übertragen wird, kommt durch den Begriff der Bitrate zum Ausdruck.

Definition: *Bitrate* :

Die Bitrate (oder Telegraphiergeschwindigkeit) v eines M -ären Digitalsignals ist definiert als

$$v = v_s \text{ ld } M . \quad (2.22)$$

Hierin bezeichnet v_s die Symbolrate und ld den Logarithmus zur Basis 2.

Beim quaternären Signal gilt $M = 4$, d.h. $\lg 4 = 2$ und damit $\nu = 2\nu_S$. Beim binären Signal gilt $M = 2$, d.h. $\lg 2 = 1$ und damit $\nu = \nu_S$.

In Bild 2.5 haben also das quaternäre und das binäre Signal verschiedene Symbolraten aber die gleichen Bitraten.

Mit Tabelle 2.1 wurde jedem Symbol eines quaternären Digitalsignals ein zweistelliges binäres Codewort zugeordnet. In entsprechender Weise kann jedes Symbol eines okternären Digitalsignals durch dreistellige binäre Codewörter und jedes Symbol eines M -ären Digitalsignals durch k -stellige Codewörter ausgedrückt werden. Dabei gilt allgemein

$$k = \lg M, \quad (2.23)$$

sofern k ganzzahlig ist. Wenn k nicht ganzzahlig ist, dann gibt es zwei Möglichkeiten:

Die erste besteht darin, daß man für die Stellenzahl der binären Codewörter die k übersteigende nächsthöhere ganze Zahl wählt. Dann werden nicht alle Codewörter, die mit k Stellen gebildet werden können, benötigt. Es entsteht eine sogenannte Redundanz. In Tabelle 2.2 wird dies am Beispiel der Umcodierung einzelner ternärer Symbole in binäre Symbole verdeutlicht.

Tabelle 2.2	ternäres Symbol	binäres Codewort
	a	0 0
	b	0 1
	c	1 0

In der rechten Spalte von Tabelle 2.2 sind nur 3 von 4 möglichen Kombinationen zweier Bits benutzt worden. Der Bruchteil R (oder auch Prozentsatz) der ungenutzten Möglichkeiten heißt Redundanz. Sie beträgt in diesem Fall $R = 1/4$ (oder 25%).

Allgemein errechnet sich die Redundanz zu

$$R = \frac{M_m - M_z}{M_m}. \quad (2.24)$$

Hierin bedeutet M_m die Anzahl der möglichen Codewörter (hier 4) und M_z die Anzahl der zugelassenen Codewörter (hier 3).

Die zweite Möglichkeit besteht darin, daß man jeweils N aufeinanderfolgende Symbole des M -ären Signals zusammenfaßt und die so entstehenden M^N möglichen M -ären Codewörter durch die binären Codewörter codiert. Durch diese Maßnahme kann man mit einer hinreichend großen Anzahl N die Redundanz $M \leq \varepsilon$ machen, wobei ε eine beliebig klein vorgebbare positive Zahl ist [1]. In Tabelle 2.3 wird diese Möglichkeit am Beispiel der Umwandlung von $N = 3$ stelligen ternären Codewörter in 5 stellige binäre Codewörter illustriert.

2 Einteilung von Signalen

Tabelle 2.3

ternär	a a a	a a b	a a c	a b a	a b b ...	c c c	$3^3 = 27$ Kombinationen
binär	00000	00001	00010	00011	...		$2^5 = 32 > 27$

Im Beispiel von Tabelle 2.3 erhält man die reduzierte Redundanz von

$$R = \frac{32 - 27}{32} = \frac{5}{32} < \frac{1}{4} = \frac{8}{32}.$$

Das Aufstellen einer Tabelle entsprechend Tabelle 2.3 setzt allgemein die Möglichkeit einer lexikographischen Anordnung (d.h. wie im Lexikon) der Einzelelemente voraus (d.h. a, b, c, ... und 0, 1, 2, ...).

2.4 Energie und Leistung komplexwertiger Signale

Zu Beginn dieses Kapitels 2 wurde erwähnt, daß es für manche Überlegungen sehr zweckmäßig ist, komplexwertige Signale der reellen Zeit t zu betrachten.

$$\underline{s}(t) = s^{(r)}(t) + j s^{(i)}(t), \quad j = \sqrt{-1}. \quad (2.25)$$

$s^{(r)}(t)$ bezeichnet den Realteil und $s^{(i)}(t)$ den Imaginärteil.

In Anlehnung an (2.4) ist die Signalenergie eines komplexwertigen zeitkontinuierlichen Signals definiert durch

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{s}(t)|^2 dt. \quad (2.26)$$

Für reelle Signale stimmt (2.26) mit (2.4) überein. Für $0 < E < \infty$ ist das komplexe Signal $\underline{s}(t)$ ein Energiesignal.

Schreibt man

$$|\underline{s}(t)|^2 = \underline{s}(t) \underline{s}^*(t), \quad (2.27)$$

wobei der Stern (*) den konjugiert komplexen Wert bedeutet, und setzt man (2.27) und (2.25) in (2.26) ein, dann erhält man

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} [s^{(r)}(t) + j s^{(i)}(t)] [s^{(r)}(t) - j s^{(i)}(t)] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [s^{(r)}(t)]^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} [s^{(i)}(t)]^2 dt = E^{(r)} + E^{(i)} . \quad (2.28)$$

Damit ergibt sich die Energie E des komplexen Signals $s(t)$ als Summe der Energie $E^{(r)}$ des Realteils $s^{(r)}(t)$ und der Energie $E^{(i)}$ des Imaginärteils $s^{(i)}(t)$.

$$E^{(r)} = \int_{-\infty}^{+\infty} [s^{(r)}(t)]^2 dt \quad ; \quad E^{(i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} [s^{(i)}(t)]^2 dt . \quad (2.29)$$

Die Definition der mittleren Leistung eines komplexwertigen Signals lautet entsprechend, vergl. (2.12) :

$$P = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{+\theta} |\underline{s}(t)|^2 dt . \quad (2.30)$$

Für reelle Signale stimmt (2.30) mit (2.12) überein. Für $0 < P < \infty$ ist das komplexe Signal $\underline{s}(t)$ ein Leistungssignal.

In gleicher Weise wie bei der Energie läßt sich zeigen, daß die mittlere Leistung P des komplexen Signals $\underline{s}(t)$ sich aus der Summe der mittleren Leistung $P^{(r)}$ des Realteils $s^{(r)}(t)$ und der mittleren Leistung $P^{(i)}$ des Imaginärteils $s^{(i)}(t)$ zusammensetzt.

$$P = P^{(r)} + P^{(i)} . \quad (2.31)$$

Die Tatsache, daß sich beim komplexwertigen Signal $\underline{s}(t)$ die Energie bzw. Leistung als Summe der Energien bzw. Leistungen der Real- und Imaginärteile ergibt, ist höchst bemerkenswert. Betrachtet man nämlich statt (2.25) die reelle Signalsumme (ohne j)

$$s(t) = s^{(r)}(t) + s^{(i)}(t) , \quad (2.32)$$

dann ergibt sich die Energie bzw. Leistung der resultierenden reellen Signalsumme $s(t)$ im allgemeinen *nicht* als Summe der Energien bzw. Leistungen der Anteile $s^{(r)}(t)$ und $s^{(i)}(t)$, wie später in Abschnitt 4.1 näher ausgeführt wird.

Physikalisch kann man sich deshalb ein komplexwertiges Signal $\underline{s}(t)$ als zwei reelle Signale $s^{(r)}(t)$ und $s^{(i)}(t)$ vorstellen, die je über eine eigene Leitung geführt werden. Im Unterschied dazu hat man es bei der Signalsumme (2.32) mit einer Überlagerung zweier Signale auf der selben Leitung zu tun.

Technische Anwendungen komplexwertiger Signale werden später in den Abschnitten 12.5, 12.6 und 13.3 beschrieben.

2.5 Näheres über Dirac–Impulse

Mathematisch ist der Dirac–Impuls $\delta(x)$ der Variablen x keine Funktion im üblichen Sinn, sondern eine sogenannte *Distribution*. Das bedeutet, daß einer an der Stelle $x = x_0$ stetigen Funktion $s(x)$ mit dem folgenden links stehenden Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(x) \delta(x-x_0) dx = s(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) dx = s(x_0) \quad (2.33)$$

der Zahlenwert $s(x_0)$ zugeordnet wird [16], [26]. Speziell für $s(x) \equiv 1$ und $x_0 = 0$ folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (2.34)$$

Der Sachverhalt (2.33) sei nun mit Bild 2.6 veranschaulicht. Die Funktion $s(x)$ wird überall mit Null multipliziert ausgenommen an der Stelle $x = x_0$, wo sich der Dirac–Impuls $\delta(x - x_0)$ befindet. Deshalb darf $s(x)$ durch $s(x_0)$ ersetzt und vor das Integral gezogen werden, siehe mittleres Integral in (2.33). Die Fläche des Dirac–Impulses ist unabhängig von x_0 gleich Eins. Der Zusammenhang (2.33) wird auch als *Siebwirkung* bezeichnet.

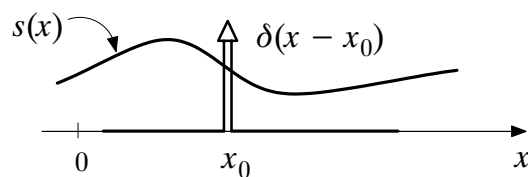


Bild 2.6 Zur Erläuterung der Beziehung (2.33)

Mit (2.14) wurde gezeigt, daß die mittlere Leistung des Dirac–Impulses $\delta(t)$ vom Faktor α , d.h. vom Maßstab der zeitlichen Mittelwertbildung gemäß Bild 2.3b abhängt. Eng verwandt damit ist, daß auch die Fläche des Dirac–Impulses vom Abzissenmaßstab abhängt. Die Fläche des gedehnten Dirac–Impulses $\delta(bt)$ ergibt sich nämlich mit der Substitution $bt = x$, $bdt = dx$ zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(bt) dt = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \frac{1}{b} \quad \text{für } b > 0. \quad (2.35)$$

Neben dem bisher betrachteten reellen Dirac–Impuls $\delta(t)$ wird für die Untersuchung komplexwertiger Systeme, die später in Abschnitt 12.6 kurz behandelt werden, auch der komplexe Dirac–Impuls

$$\underline{\delta}(t) = (1 + j)\delta(t) = \delta(t) + j\delta(t) \quad (2.36)$$

verwendet. Genauso wie beim komplexen Signal $\underline{s}(t)$ hat man sich auch den komplexen Dirac–Impuls $\underline{\delta}(t)$ als zwei reelle Dirac–Impulse vorzustellen, die je über eine eigene Leitung geführt werden, vergl. Abschnitt 2.4.