Bernd Jähne

Digitale Bildverarbeitung

Mit 144 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork
London Paris Tokyo 1989

A Die Fouriertransformation

Die Fouriertransformation ist eines der grundlegenden mathematischen Hilfsmittel zum Verständnis der digitalen Bildverarbeitung. Daher sind hier die wichtigsten Eigenschaften der Fouriertransformation in Form eines Repetitoriums zusammengefaßt. Eine ausführliche Darstellung ist bei *Bracewell* [1965] zu finden.

A.1 1D-Fouriertransformation

Die Fouriertransformation einer eindimensionalen Funktion $f(x)$, die wir mit $\hat{f}(k)$ bezeichnen, ist durch

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-\mathrm{i}kx)\, \mathrm{d}x \tag{A.1}$$

definiert; dabei ist k die Wellenzahl, die durch die Wellenlänge λ über $k = 2\pi/\lambda$ bestimmt wird.

Die Fouriertransformation liefert uns eine Zerlegung der Funktion in periodische Komponenten der Wellenzahl k, die als Spektrum von $f(x)$ bezeichnet wird. Für den Fourierraum selbst werden die Bezeichnungen k- oder *OF-Raum* als Abkürzung für Ortsfrequenzraum benutzt. Oft wird etwas salopp von Frequenzen gesprochen; wir halten uns hier jedoch an die Bezeichnung Wellenzahlen.

Mit der inversen Fouriertransformation

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \exp(\mathrm{i}kx)\, \mathrm{d}k \tag{A.2}$$

erhalten wir aus dem Spektrum $\hat{f}(k)$ wieder die Funktion $f(x)$ im Ortsraum. Eine Funktion $f(x)$ und ihre Fouriertransformierte $\hat{f}(k)$ bilden zusammen ein sogenanntes Fouriertransformationspaar, das in der Schreibweise

$$f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{f}(k)$$

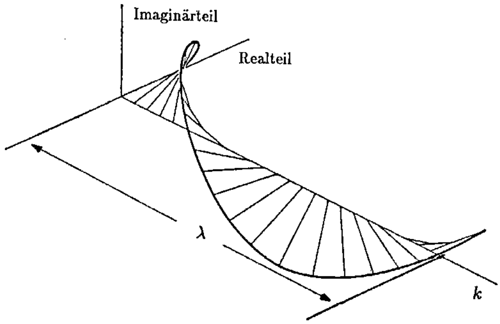

Abb. A.1: Die Basisfunktionen $\exp(-ikx)$ der Fouriertransformation sind Spiralen mit der Ganghöhe $\lambda = 2\pi/k$.

symbolisiert wird. Die Funktionen $\exp(-\mathrm{i}kx)$ im Integral der Fouriertransformation werden als der Kern der Fouriertransformation bezeichnet. Der Kern der inversen Fouriertransformation, $\exp(\mathrm{i}kx)$, ist dazu konjugiert komplex. Die Funktionen $\exp(-\mathrm{i}kx)$ bilden ein System orthonormaler Funktionen (Orthonormalbasis). Die Orthogonalität bedeutet, daß das Skalarprodukt zweier verschiedener Funktionen verschwindet, d. h.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}k'x)\exp(\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x = \delta(k'-k). \tag{A.3}$$

Aufgrund dieser Eigenschaft des Kerns können wir die Fouriertransformation auch als eine Entwicklung der Funktion $f(x)$ nach den Basisfunktionen $\exp(-\mathrm{i}kx)$ auffassen; dabei geben die Koeffizienten $\hat{f}(k)$ die Beiträge der einzelnen Frequenzkomponenten zur Funktion $f(x)$ an.

Im allgemeinen ist die Fouriertransformierte einer reellen Funktion eine komplexe Größe

$$\hat{f}(k) = \mathrm{Re}\,\hat{f}(k) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\hat{f}(k),$$

dabei bezeichnen wir mit $\mathrm{Re}\,\hat{f}(k)$ bzw. $\mathrm{Im}\,\hat{f}(k)$ den Real- bzw. Imaginärteil von $\hat{f}(k)$.

Eine komplexe Zahl können wir in der komplexen Zahlenebene als Vektor darstellen, der sich durch seinen Real- und Imaginärteil oder durch Betrag und Phase beschreiben läßt. In einem dreidimensionalen Koordinatensystem mit den Achsen x, $\mathrm{Re}\hat{f}(k)$, $\mathrm{Im}\hat{f}(k)$ können wir uns komplexe Funktionen veranschaulichen. Die Basisfunktionen der Fouriertransformation sind in dieser Darstellung Spiralen mit einer Ganghöhe $\lambda = 2\pi/k$ (Abb. A.1). Die Umwandlung in Betrag und Phase (Polarkoordinaten) wird durch folgende Formeln beschrieben:

$$\hat{f}(k) = |\hat{f}(k)|\exp[\mathrm{i}\varphi(k)]. \tag{A.4}$$

Dabei ist

$$|\hat{f}(k)| = \sqrt{[\mathrm{Re}\hat{f}(k)]^2 + [\mathrm{Im}\hat{f}(k)]^2} \tag{A.5}$$

der Betrag und

$$\phi(k) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\hat{f}(k)}{\mathrm{Re}\hat{f}(k)}\right) \tag{A.6}$$

die Phase der komplexen Funktion.

A.2 2D-Fouriertransformation

Die analoge Definition für die zweidimensionalen Funktionen lautet

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}) \hat{f}(\boldsymbol{k}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{A.7}$$

Dabei ist $\boldsymbol{k}$ der *Wellenvektor*, dessen Betrag durch die Wellenlänge λ

$$|\boldsymbol{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{A.8}$$

bestimmt wird. Die 2D-Fouriertransformation zerlegt also die 2D-Bildfunktion in periodische Strukturen unterschiedlicher Wellenlänge *und* Richtung.

Welche Beziehung besteht nun zur 1D-Fouriertransformation? Das Skalarprodukt $\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}$ im Exponenten können wir in Komponenten auftrennen:

$$\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x} = \mathrm{i}(k_1 x_1 + k_2 x_2).$$

Dadurch können wir den Kern als Produkt schreiben:

$$\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}) = \exp\left(-\mathrm{i}k_1 x_1\right) \exp\left(-\mathrm{i}k_2 x_2\right). \tag{A.9}$$

Der Kern ist damit in den kartesischen Koordinaten separabel. Daraus resultiert unmittelbar, daß wir die 2D-Fouriertransformation in zwei aufeinanderfolgende 1D-Transformationen zerlegen können:

$$f(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x}) \exp\left(-\mathrm{i}k_1 x_1\right) \mathrm{d}x_1 \right)}_{\text{Zeilentransformation}} \exp\left(-\mathrm{i}k_2 x_2\right) \mathrm{d}x_2. \tag{A.10}$$

Das innere Integral stellt eine Transformation in x_1-Richtung dar (*Zeilentransformation*) und liefert eine Funktion mit den Variablen k_1 und x_2. Das äußere Integral führt eine Transformation in x_2-Richtung aus und liefert schließlich die 2D-Fouriertransformierte. Die inverse 2D-Fouriertransformation ist gegeben durch

$$f(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\boldsymbol{k}) \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{k}. \tag{A.11}$$

A.3 Eigenschaften der Fouriertransformation

Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften der Fouriertransformation zusammen, wie wir sie für die Bildverarbeitung benötigen. Sie sind so geschrieben, daß sie für beliebige Funktionen in einem d-dimensionalen Raum gelten. Dabei benutzen wir drei komplexe Funktionen $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ und $h(\boldsymbol{x})$, deren Fouriertransformierte $\hat{f}(\boldsymbol{k})$, $\hat{g}(\boldsymbol{k})$ und $\hat{h}(\boldsymbol{k})$ existieren.

Addition

$$a f(\boldsymbol{x}) + b g(\boldsymbol{x}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad a\hat{f}(\boldsymbol{k}) + b\hat{g}(\boldsymbol{k}) \quad \forall \quad a, b \in \mathbb{C}. \tag{A.12}$$

Das *Additionstheorem* folgt unmittelbar aus der Linearität der Fouriertransformation und ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung der Transformierten von Funktionen, die sich als Linearkombination der Funktionen mit bekannten Fouriertransformierten schreiben lassen.

Ähnlichkeit

$$f(ax_1, bx_2) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{|ab|}\hat{f}\left(\frac{k_1}{a}, \frac{k_2}{b}\right) \quad \forall \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{A.13}$$

Das *Ähnlichkeitstheorem* beschreibt die *Reziprozität* beider Räume. Wird eine Funktion im Ortsraum um einen Faktor gedehnt, so wird die Fouriertransformierte um denselben Faktor komprimiert.

Verschiebung

Die Verschiebung einer Funktion im Ortsraum um einen Vektor $\boldsymbol{x}_0$ bewirkt eine Phasenverschiebung der Fouriertransformierten um einen Phasenfaktor $\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_0)$:

$$\begin{array}{ccc} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \hat{f}(\boldsymbol{k})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_0) \\ f(\boldsymbol{x})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \hat{f}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0). \end{array} \tag{A.14}$$

Das *Verschiebungstheorem* können wir unmittelbar aus der Definition der Fouriertransformation (A.7) herleiten. Man kann es sich gut an einer Sinusfunktion veranschaulichen. Verschiebt man diese Funktion im Ortsraum gerade um eine Wellenlänge, so ist der Phasenfaktor gerade 2π, die Funktion bleibt in beiden Räumen unverändert. Das Verschiebungstheorem hebt die Bedeutung der Phase für die Bildinformation hervor. Es gilt auch in umgekehrter Richtung für Verschiebungen im Frequenzraum.

Symmetrieeigenschaften

Eine besondere Rolle spielen *gerade* und *ungerade* Funktionen. Diese Symmetrien sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{array}{ll} f_g \text{ gerade}: & f_g(\boldsymbol{x}) = f_g(-\boldsymbol{x}) \\ f_u \text{ ungerade}: & f_u(\boldsymbol{x}) = -f_u(-\boldsymbol{x}). \end{array} \tag{A.15}$$

Jede Funktion $f(\boldsymbol{x})$ kann als Summe einer geraden Funktion $f_g(\boldsymbol{x})$ und einer ungeraden Funktion $f_u(\boldsymbol{x})$ geschrieben werden:

$$f(\boldsymbol{x}) = f_g(\boldsymbol{x}) + f_u(\boldsymbol{x}); \tag{A.16}$$

dabei berechnen sich die geraden und ungeraden Funktionsanteile so:

$$\begin{aligned} f_u(\boldsymbol{x}) &= \tfrac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) + f(-\boldsymbol{x})) && \text{ungerade} \\ f_g(\boldsymbol{x}) &= \tfrac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) - f(-\boldsymbol{x})) && \text{gerade.} \end{aligned} \tag{A.17}$$

Die Symmetrieeigenschaften gerade und ungerade bleiben unter der Fouriertransformation erhalten:

$$\begin{array}{llcll} f_g(\boldsymbol{x}) & \text{gerade} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \hat{f}_g(\boldsymbol{k}) & \text{gerade} \\ f_u(\boldsymbol{x}) & \text{ungerade} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \hat{f}_u(\boldsymbol{k}) & \text{ungerade.} \end{array} \tag{A.18}$$

Auch diese Tatsache resultiert unmittelbar aus den Eigenschaften des Kerns, der sich aus einem geraden Realteil, einer Kosinusfunktion, und einem ungeraden Imaginärteil, einer Sinusfunktion, zusammensetzt:

$$\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}) = \cos \boldsymbol{k}\boldsymbol{x} + \mathrm{i}\sin \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}. \tag{A.19}$$

Diese Eigenschaft bewirkt weitere Besonderheiten für die Transformation einer *reellen* Funktion. Als Fouriertransformierte ergibt sich eine komplexe Funktion mit geradem Realteil und ungeradem Imaginärteil. Solche Funktionen werden als *hermitisch* bezeichnet. Die gegenteilige Eigenschaft, eine Funktion mit ungeradem Realteil und geradem Imaginärteil, heißt *antihermitisch*. In Formeln:

$$\begin{array}{ll} f \text{ hermitisch :} & f^*(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x}) \\ f \text{ antihermitisch :} & f^*(\boldsymbol{x}) = -f(-\boldsymbol{x}) \end{array} \tag{A.20}$$

und

$$\begin{array}{llcll} f(\boldsymbol{x}) & \text{reell} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \hat{f}(\boldsymbol{k}) & \text{hermitisch} \\ f(\boldsymbol{x}) & \text{imaginär} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \hat{f}(\boldsymbol{k}) & \text{antihermitisch.} \end{array} \tag{A.21}$$

(Der * am Funktionssymbol bedeutet die Bildung der konjugiert komplexen Funktion.) Da die Bilder, die wir betrachten, immer reell sind, sind ihre Fouriertransformierten hermitische Funktionen, die vollständig bestimmt sind, wenn sie für einen *Halbraum*, z. B. alle positiven k_1-Werte bekannt sind. Es reicht aus, die Fouriertransformation für den positiven Halbraum zu berechnen; der negative Halbraum ergibt sich dann als die konjugiert komplexe Funktion.

Erhaltung der Norm

Das Integral über das Betragsquadrat einer Funktion wird als Norm der Funktion bezeichnet. Die Basisfunktionen der Fouriertransformation spannen einen unendlichdimensionalen komplexen Vektorraum auf. Die Norm bedeutet die Länge eines Vektors in diesem Raum. Die Fouriertransformation ist eine *unitäre* Transformation in diesem Raum, die die Norm erhält:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\boldsymbol{x})|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (2\pi)^d \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\boldsymbol{k})|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{k}. \tag{A.22}$$

Ein ähnlicher Erhaltungssatz gilt für das Skalarprodukt zweier beliebiger Funktionen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x})g^*(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (2\pi)^d \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\boldsymbol{k})\hat{g}^*(\boldsymbol{k})\mathrm{d}\boldsymbol{k}. \tag{A.23}$$

Das Faltungstheorem
Die Faltung von zwei Funktionen $f(\boldsymbol{x})$ und $h(\boldsymbol{x})$ ist definiert durch das Integral

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) * h(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x}')h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\mathrm{d}\boldsymbol{x}'. \tag{A.24}$$

Die Faltung ist eine der wichtigsten Operationen in der Bildverarbeitung. Die Faltungsoperation im Ortsraum ist eine komplexe Multiplikation im Fourierraum. Umgekehrt ist eine Multiplikation im Ortsraum eine Faltungsoperation im Fourierraum:

$$\begin{array}{ccc} f(\mathrm{x}) * h(\mathrm{x}) & \circ\!\!-\!\!\bullet & (2\pi)^d \hat{f}(\mathrm{k})\hat{h}(\mathrm{k}) \\ f(\mathrm{x})h(\mathrm{x}) & \circ\!\!-\!\!\bullet & (2\pi)^d \hat{f}(\mathrm{k}) * \hat{h}(\mathrm{k}). \end{array} \tag{A.25}$$

Ableitung
Ableitungsoperatoren im Ortsraum entsprechen einer Multiplikation mit der Wellenzahl im Fourierraum. Das gleiche gilt auch umgekehrt:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_i} & \circ\!\!-\!\!\bullet & -\mathrm{i}k_i\,\hat{f}(\mathrm{k}), \\[2ex] \mathrm{i}x_i f(\mathrm{x}) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \dfrac{\partial \hat{f}(\mathrm{k})}{\partial k_i}. \end{array} \tag{A.26}$$

A.4 Wichtige Fouriertransformationspaare

Alle bisher aufgeführten Eigenschaften der Fouriertransformation gelten aufgrund der Separierbarkeit des Kerns für die ein- und zweidimensionale Fouriertransformation. Zur Veranschaulichung der Eigenschaften der Fouriertransformation sind im folgenden einige wichtige ein- und zweidimensionale Fouriertransformationspaare zusammengestellt. Dabei ist zu bemerken, daß sich, abgesehen vom Vorzeichen im Imaginärteil, die gleichen Fouriertransformationspaare auch für die inverse Fouriertransformation ergeben.

Rechteck- und sinc-Funktion
Die Fouriertransformation setzt (räumlich und/oder zeitlich) unendlich ausgedehnte Objekte voraus. Bei allen praktischen Beobachtungen muß zwangsläufig eine Begrenzung auf einen endlichen Ausschnitt, ein *Fenster*, erfolgen. Diese Begrenzung kann mathematisch als Multiplikation der betrachteten Funktion mit der Fensterfunktion

beschrieben werden. Die einfachste Fensterfunktion ist die *Rechteckfunktion* Π. Eine Rechteckfunktion der Breite x_0 ergibt fouriertransformiert:

$$\Pi(x) = \begin{cases} a & \text{für } |x| < x_0/2 \\ a/2 & \text{für } |x| = x_0/2 \\ 0 & \text{für } |x| > x_0/2 \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{f}(k) = a x_0 \frac{\sin(x_0 k/2)}{x_0 k/2},$$

dabei ist der Ausdruck der Form $\sin(x)/x$ die sinc-Funktion. Die erste Nullstelle liegt bei $k_0 = 2\pi/x_0$ (Abb. A.2). Mit wachsender Breite des Rechtecks geht daher die Nullstelle bei k_0 gegen null (Reziprozität, siehe Ähnlichkeitstheorem (A.13)). Im Grenzfall einer konstanten Funktion im Ortsraum ist die Fouriertransformierte eine Deltafunktion an der Stelle $k = 0$ (Abb. A.2).

Kosinus-, Sinusfunktion
Als Beispiel periodischer Funktionen betrachten wir die Fouriertransformation der Sinus- und Kosinusfunktion. Eine Kosinusfunktion (reell, gerade) der Wellenlänge λ_0 ergibt fouriertransformiert zwei reelle Deltafunktionen, die symmetrisch zum Ursprung an den Stellen $k_0 = \pm 2\pi/\lambda$ liegen (Abb. A.2):

$$f(\boldsymbol{x}) = a\cos(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{a}{2}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0) + \frac{a}{2}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_0).$$

Eine Sinusfunktion (reell, ungerade) der Wellenlänge λ_0 ergibt zwei imaginäre Deltafunktionen, die antisymmetrisch zum Ursprung an den Stellen $k_0 = \pm 2\pi/\lambda$ liegen:

$$f(\boldsymbol{x}) = a\sin(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{f}(\boldsymbol{k}) = -\mathrm{i}\frac{a}{2}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0) + \mathrm{i}\frac{a}{2}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_0).$$

Deltakamm
Eine weitere wichtige Funktion ist die äquidistante Folge von Deltafunktionen, die wir als *Deltakamm* oder *Abtastfunktion* bezeichnen. Bilden wir die Fouriertransformierte eines unendlich ausgedehnten Deltakamms mit der Periode λ_0 (Abstand der Deltapeaks), erhalten wir im OF-Raum einen Deltakamm mit der Periode $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ (Abb. A.2):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\lambda_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{f}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k - nk_0).$$

Gaußfunktion
Eine Funktion, die ihre Form unter der Fouriertransformation nicht verändert, ist die Gaußsche Verteilungsfunktion (Glockenkurve). Wir erhalten folgendes Fouriertransformationspaar:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \exp\left(-\frac{k^2}{2/\sigma^2}\right).$$

Die Halbwertsbreiten (Standardabweichung) σ^2 im Orts- und OF-Raum verhalten sich reziprok zueinander. Je kleiner die Halbwertsbreite im Ortsraum ist, desto größer ist sie im OF-Raum. Diese Eigenschaft wird als *Unschärferelation* der Fouriertransformation bezeichnet: Je schärfer ein Bereich im Ortsraum (Halbwertsbreite σ^2) lokalisiert ist, desto weiter ist der korrespondierende Frequenzbereich ausgedehnt (Halbwertsbreite $1/\sigma^2$), und umgekehrt. Diese Eigenschaft der Fouriertransformation wird auch aus den anderen Fouriertransformationspaaren deutlich. Zum Beispiel ist die konstante Funktion im Ortsraum unendlich ausgedehnt und besitzt daher als Frequenzspektrum einen scharfen Deltapuls. Für zwei Dimensionen gilt die Unschärferelation für jede Koordinate unabhängig (Separabilität). Wir veranschaulichen uns das am Beispiel einer Deltalinie. In Abb. A.3 ist eine Deltalinie in zwei Dimensionen im Orts- und OF-Raum dargestellt. Im Ortsraum besitzt die Deltalinie in x_1-Richtung eine unendliche Ausdehnung; das impliziert nach der Unschärferelation im OF-Raum eine punktförmige Ausdehnung in k_1-Richtung. In x_2-Richtung ist die Linie scharf lokalisiert, so daß eine unendliche Ausdehnung im OF-Raum die Folge ist. Die Fouriertransformierte einer Deltalinie ergibt damit eine um 90° gedrehte Deltalinie im OF-Raum.

Abbildungen A.2 bis A.4 enthalten weitere Fouriertransformationspaare, die für die Bildverarbeitung von Bedeutung sind. Die Graphiken sind aus sich selbst heraus verständlich.

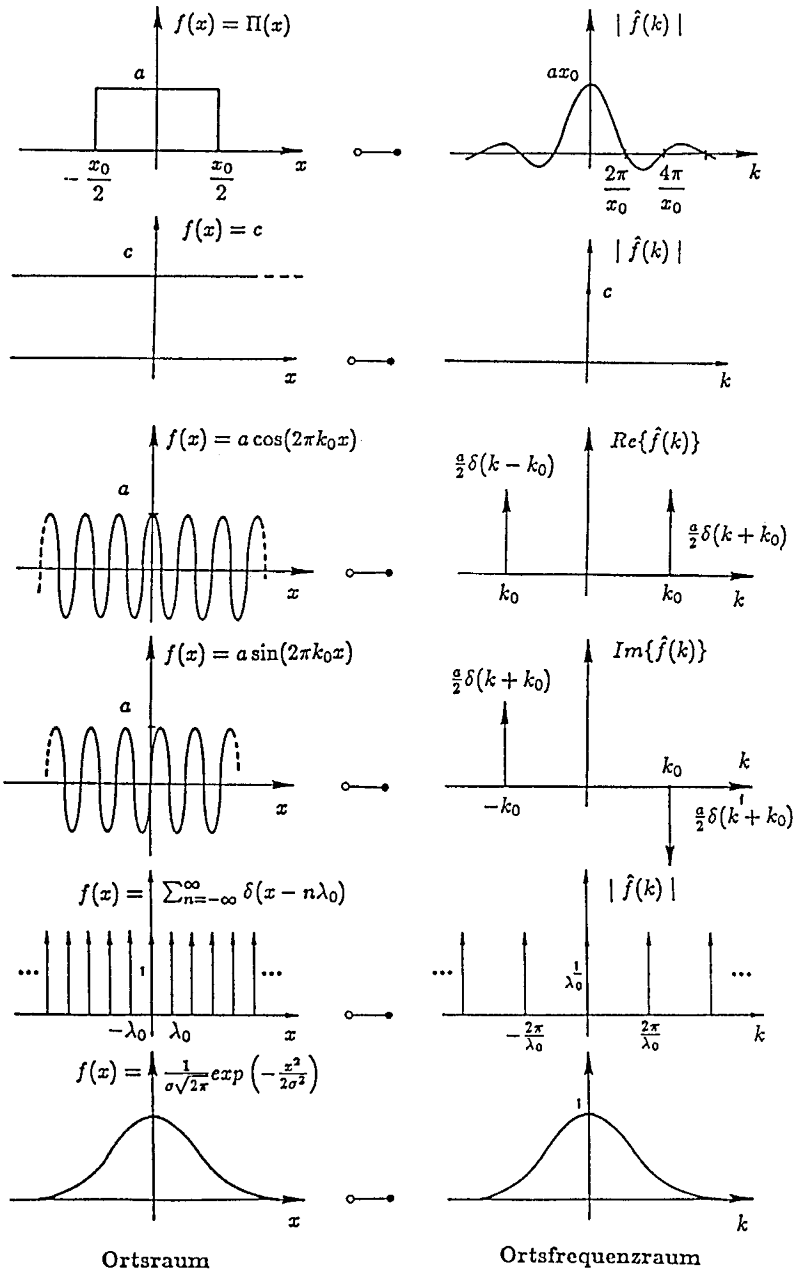

Abb. A.2: Beispiele von 1D-Fouriertransformationspaaren.

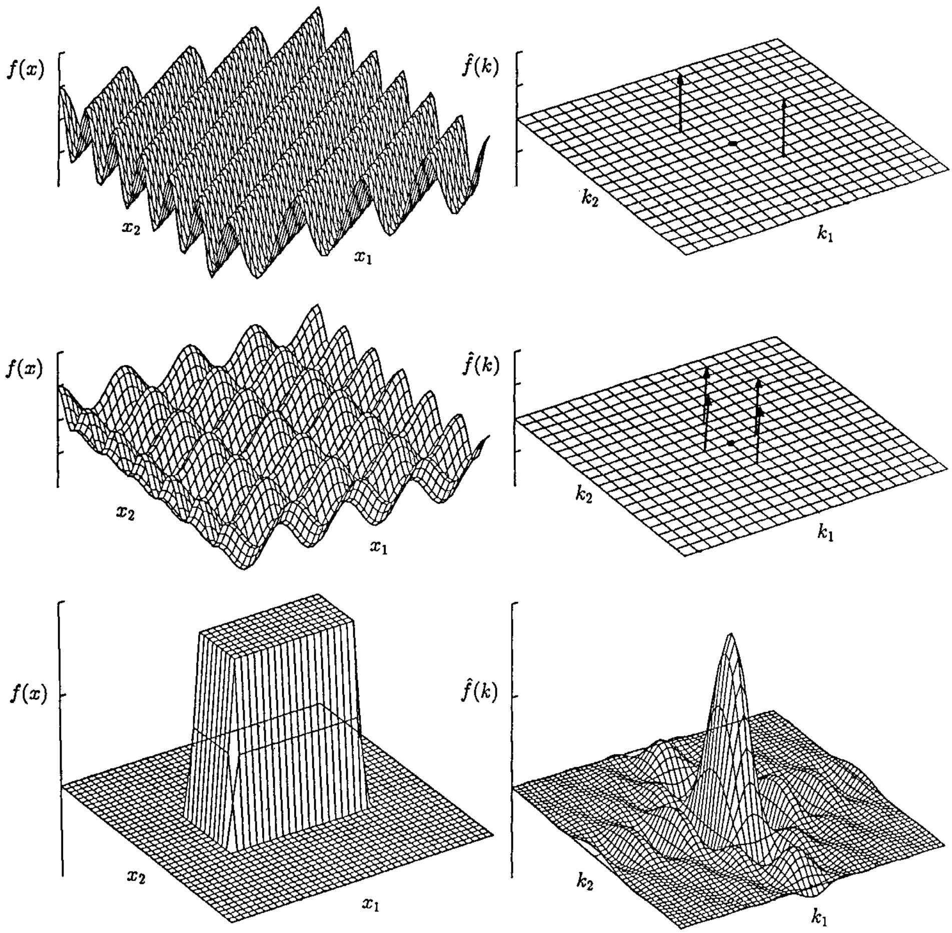

Abb. A.3: Beispiele von 2D-Fouriertransformationspaaren (I).

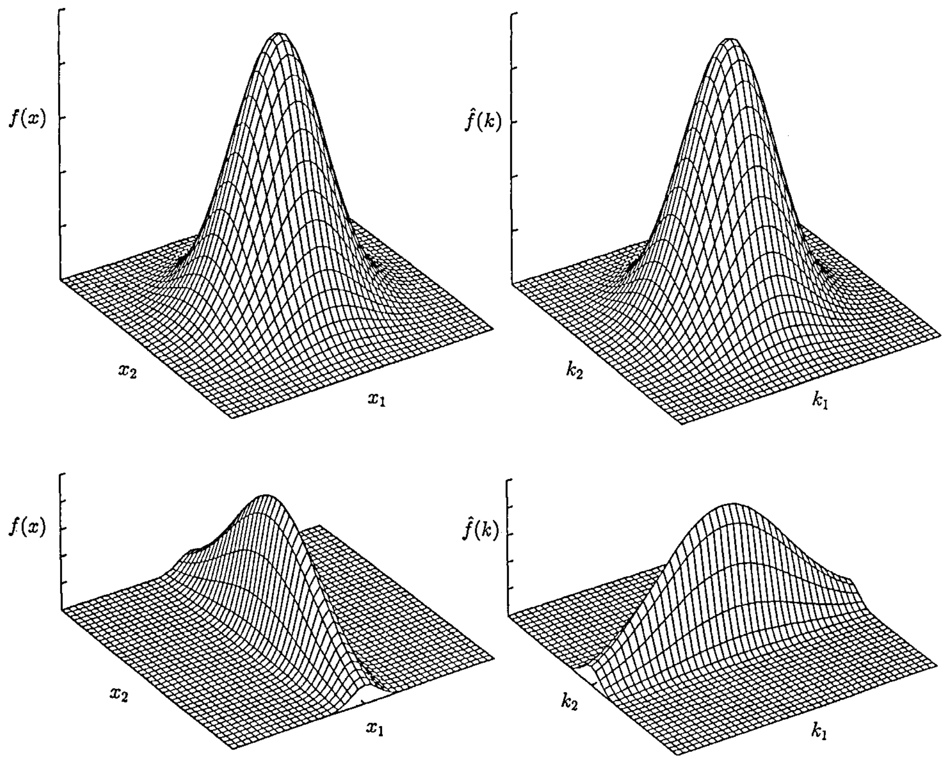

Abb. A.4: Beispiele von 2D-Fouriertransformationspaaren (II).