Bildverarbeitung interaktiv

Eine Einführung mit multimedialem Lernsystem auf CD-ROM

Von Prof. Dr. Herbert Kopp
Fachhochschule Regensburg

B. G. Teubner Stuttgart 1997

4 Fourier-Transformationen

Wie für viele andere Anwendungsfelder sind Fourier-Transformationen auch für die Bildverarbeitung ein wichtiges Instrument. Aus diesem Grund sind bildverarbeitende Systeme oft mit Spezialprozessoren dafür ausgestattet. Einige Beispiele verdeutlichen die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten der Fourier-Transformationen in der Bildverarbeitung:

4.1 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Beispiel 1

Filter beseitigen Bildfehler, z.B. periodische Störungen. Mit Hilfe der Fourier-Transformation kann man die Charakteristik solcher Störsignale leichter erkennen und den Filteroperator darauf abstimmen (Abbildung 4.1).

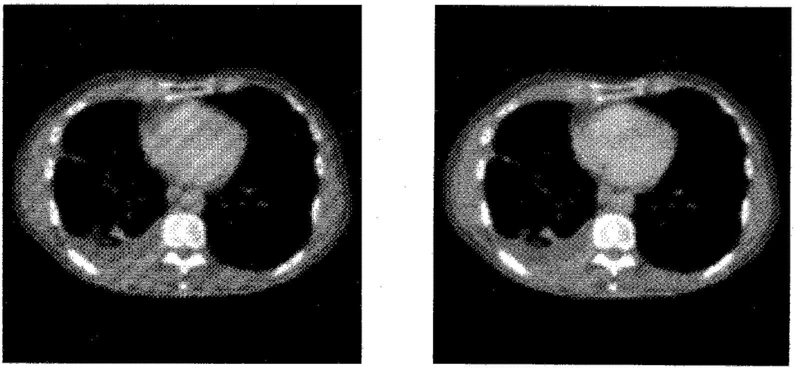

Abb. 4.1 Beseitigung periodischer Störungen in einem Bild

Beispiel 2

Rekonstruktionsverfahren zur Berechnung von Schnittbildern aus Projektionen, wie sie in der Tomographie eingesetzt werden, basieren auf Fourier-Transformationen (Abbildung 4.1).

Beispiel 3

Das Shannon' sche Abtast-Theorem aus der Fourier-Theorie liefert Aussagen darüber, mit welcher Auflösung Bilder digitalisiert werden müssen, um Störeffekte (Aliasing) zu vermeiden. Abbildung 4.2 zeigt ein gerastertes Photo, das mit einer zu geringen Auflösung abgetastet wurde.

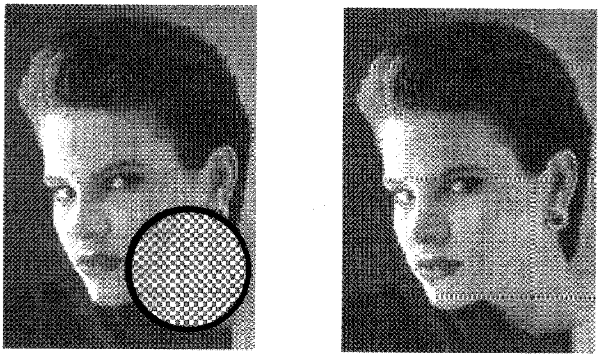

Abb. 4.2 Aliasing-Effekte bei der Abtastung eines Rasterbildes

Wir stellen in diesem Kapitel die wesentlichen Eigenschaften von Fourier-Transformationen zusammen, und zwar als Basis für spätere Anwendungen. Die Darstellung erfolgt auf intuitiver Basis ohne exakte Begründung der Aussagen. Für ein erstes Verständnis ist dies ausreichend, wir empfehlen jedoch, danach Anhang A durchzuarbeiten, der die mathematischen Zusammenhänge exakter darstellt.

Problemtransformationen

Ein genereller Ansatz zur Lösung mathematischer Probleme basiert darauf, sie zunächst einer Transformation zu unterwerfen, und dann das transformierte Problem zu bearbeiten. Falls das Ergebnis zurücktransformiert werden kann, hat man damit die ursprüngliche Aufgabenstellung gelöst.

So ist es zum Beispiel möglich, statt zwei Zahlen konventionell miteinander zu multiplizieren, sie zunächst zu logarithmieren und ihre Logarithmen zu addieren. Um das Produkt zu erhalten, müssen wir die Summe anschließend zurücktransformieren. Das Diagramm der Abbildung 4.3 zeigt dies.

Die Fourier-Transformation

Auch die Fourier-Transformation folgt diesem allgemeinen Prinzip. Wir betrachten dazu eine reelle Funktion $h(x)$. Aus historischen Gründen stellt man sich h oft als eine Funktion des Ortes oder der Zeit vor und bezeichnet sie als Signal. Der Definitionsbereich von h heißt *Ortsraum*.

Die Fourier-Transformation **FT** bildet die Funktion h ab nach der Vorschrift:

$$\mathbf{FT}:\quad h(x) \to H(f) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-2\pi i f t}\, \mathrm{d}t\,.$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
A * B \arrow[r, "\text{Transformation}", "\ln"'] \arrow[d, "\text{Multiplikation}"'] & \ln(A) + \ln(B) \arrow[d, "\text{Addition}"] \\
C & \ln(C) \arrow[l, "\ln^{-1}"', "\text{inverse Transformation}"]
\end{tikzcd}$$

Abb. 4.3 Problemlösung durch Transformation

Dabei wird h in periodische Komponenten zerlegt. Wir bezeichnen daher den Definitionsbereich von $H(f)$ als Ortsfrequenzraum. Die Fourier-Transformation ist also eine Transformation auf Funktionenräumen. Ihre praktische Bedeutung beruht vor allem darauf, daß wichtige Eigenschaften an der transformierten Funktionen $H(f)$ im Ortsfrequenzraum besser erkennbar sind als bei der Ausgangsfunktion $h(x)$ im Ortsraum.

Das definierende Integral der Fourier-Transformation existiert unter sehr allgemeingültigen Bedingungen und ist dann auch umkehrbar. Die inverse Fourier-Transformation **IFT** besitzt die Abbildungsvorschrift:

$$\textbf{IFT:} \quad H(f) \rightarrow h(x) = \int_{f=-\infty}^{+\infty} H(f)\, e^{2\pi i f x}\, df \,.$$

Die Fourier-Transformierte der reellen Funktion $h(x)$ ist also eine komplexwertige Funktion $H(f)$. Als das Fourier-Spektrum von H bezeichnet man den Betrag $|H(f)|$. Abbildung 4.4 zeigt ein Bild und sein Fourier-Spektrum.

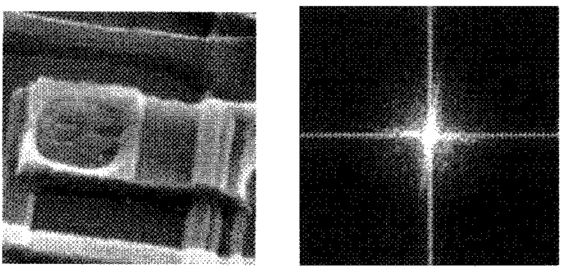

Abb. 4.4 Ein Bild und seine Fourier-Transformierte

Die Fourier-Transformierte einer Konstanten

Die Fourier-Transformierte einer konstanten Funktion $h(x)=c$ ist ein Peak der Höhe c im Zentrum des Ortsfrequenzraumes. Abbildung 4.5 zeigt das für den eindimensionalen Fall.

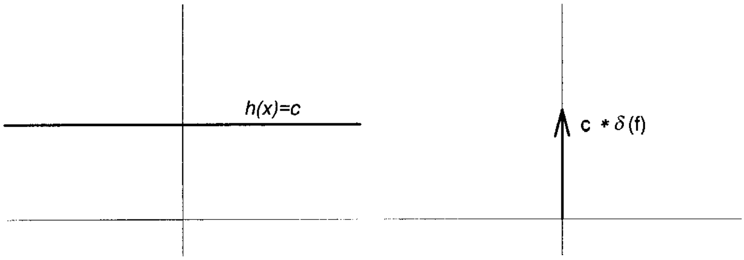

Abb. 4.5 Die Fourier-Transformierte einer Konstanten

Die Fourier-Transformierte einer Rechteck-Funktion

Die Fourier-Transformierte einer Rechteckfunktion ist eine gedämpfte Sinusschwingung. Wie Abbildung 4.6 zeigt, besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen der Breite der Rechteckfunktion und der Form der Sinusschwingung: Wenn wir die Breite der Rechteckfunktion wachsen lassen, dann rücken die Nullstellen der Fourier-Transformierten näher zusammen und die Höhe des zentralen Sinusbogens wächst. Im Grenzfall erhalten wir als Fourier-Transformierte einer konstanten Funktion einen Peak im Zentrum des Ortsfrequenzraumes. Abbildung 4.7 zeigt den gleichen Sachverhalt für zweidimensionale Bildfunktionen.

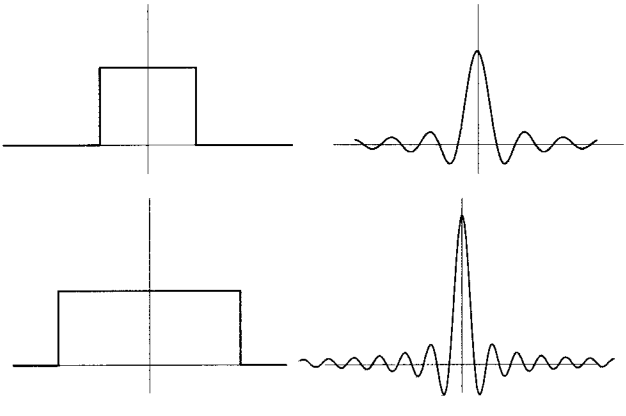

Abb. 4.6 Die Fourier-Transformierte einer Rechteckfunktion

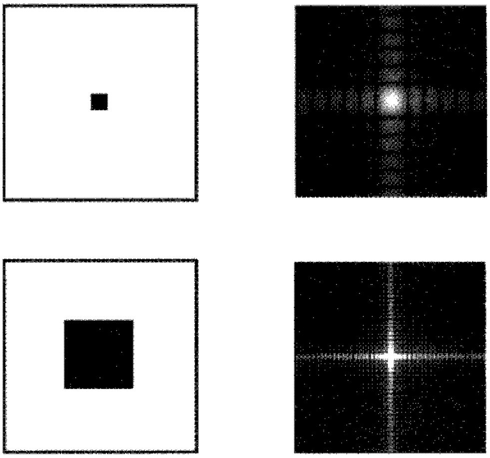

Abb. 4.7 Die Fourier-Transformierte von Quadraten

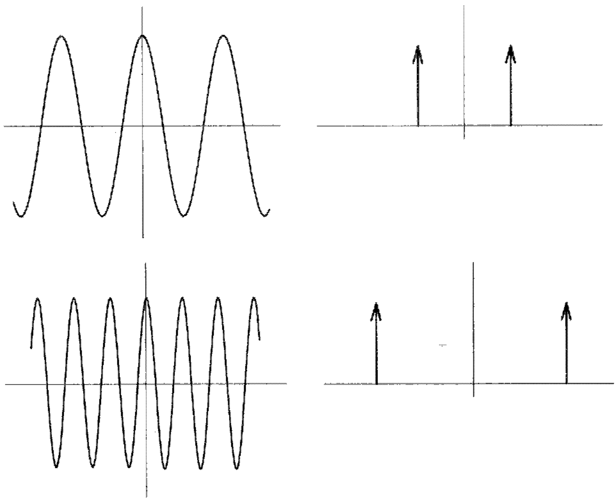

Abb. 4.8 Die Fourier-Transformierte einer Schwingung

Die Fourier-Transformierte periodischer Funktionen

Die Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion besteht aus zwei Peaks, die symmetrisch zum Zentrum des Ortsfrequenzraumes liegen (Abbildung 4.8). Auch hier besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen der Frequenz der Schwingung und dem Abstand der Peaks zum Nullpunkt des Ortsfrequenzraumes: Wenn wir die Frequenz wachsen lassen, also die Periodendauer verkürzen, dann rücken die Peaks der Fourier-Transformierten weiter auseinander.

Linearität der Fourier-Transformation

Die lineare Skalierung der Pixelwerte oder die additive Überlagerung von Bildern sind lineare Operationen im Ortsraum. Die Linearitätseigenschaften der Fourier-Transformation garantieren, daß wir solche Operationen mit demselben Resultat auch auf die Fourier-Transformierten der Bilder anwenden dürfen.

Abbildung 4.9 zeigt ein Beispiel dafür: Auf der linken Seite werden eine periodische Funktion $g(x)$ und eine Konstante $h(x)$ additiv überlagert. Dies entspricht im Ortsfrequenzraum einer Addition der Fourier-Transformierten, wie dies die rechte Seite der Abbildung zeigt.

Abbildung 4.10 zeigt den gleichen Sachverhalt für eine zweidimensionale Bildfunktion: Hier wird eine Cosinusschwingung um einen konstanten Betrag erhöht. Die Fourier-Transformierte der Gesamtfunktion zeigt daher sowohl den Peak der Konstanten im Zentrum als auch symmetrisch dazu die beiden Peaks der Cosinusschwingung.

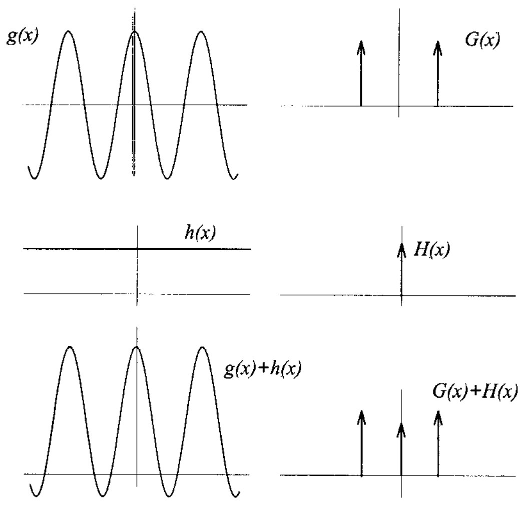

Abb. 4.9 Additive Überlagerung im eindimensionalen Fall

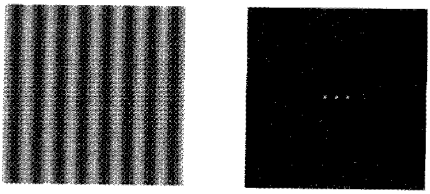

Abb. 4.10 Additive Überlagerung im zweidimensionalen Fall

Verschiebungen im Ortsraum

Einer Verschiebung der Bildfunktion im Ortsraum entspricht eine Multiplikation ihrer Fourier-Transformierten mit einem komplexen Faktor vom Betrag 1, also eine Phasenverschiebung im Ortsfrequenzraum. Eine Verschiebung verändert damit das Fourier-Spektrum des Bildes nicht, wie die Abbildung 4.11 zeigt: Sowohl das zentrierte wie auch das verschobene Quadrat besitzen dasselbe Sprektrum.

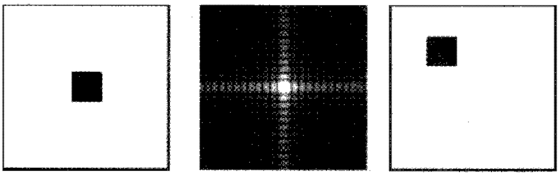

Abb. 4.11 Invarianz des Spektrums gegen Verschiebungen

Ähnlichkeitstransformationen

Einer Ähnlichkeitstransformation im Ortsraum mit einem skalaren Faktor a entspricht eine analoge Transformation der Fourier-Transformierten mit dem Kehrwert von a . Die Abbildungen 4.6 und 4.7 sind Beispiele für diesen allgemeineren Sachverhalt.

Drehungen

Einer Drehung im Ortsraum entspricht eine analoge Drehung der Fourier-Transformierten im Ortsfrequenzraum, wie die Abbildung 4.12 zeigt.

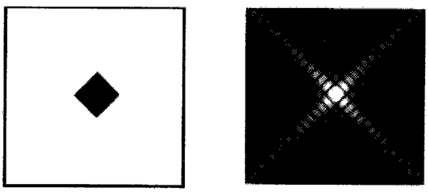

Abb. 4.12 Einfluß einer Drehung auf die Fourier-Transformierte

Der Faltungssatz

Filter, wie sie in Kapitel 5 behandelt werden, sind im mathematischen Sinn Faltungen. Technisch werden sie mit Maskenoperatoren realisiert. Der Faltungssatz stellt einen Zusammenhang her zwischen Faltungen im Ortsraum und einer äquivalenten Operation im Ortsfrequenzraum, nämlich einer Multiplikationsoperation.

Damit können wir das gleiche Resultat entweder durch eine Filterung mit einem Maskenoperator im Ortsraum erreichen oder durch eine Multiplikation im Ortsfrequenzraum. Eine solche Transformation des Problems ist z.B. vorteilhaft beim Design von Filtern mit ganz bestimmten Eigenschaften.

Abbildung 4.13 veranschaulicht die Aussage des Faltungssatzes: Auf der linken Seite wirkt auf ein Bild ein Glättungsoperator, der die Kanten verwischt. Rechts wird die Fourier-Transformierte dieses Bildes mit einer Gewichtsfunktion multipliziert, die hochfrequente Anteile unterdrückt. Beide Ergebnisse sind wieder durch die Fourier-Transformation bzw. durch ihre Inverse ineinander überführbar.

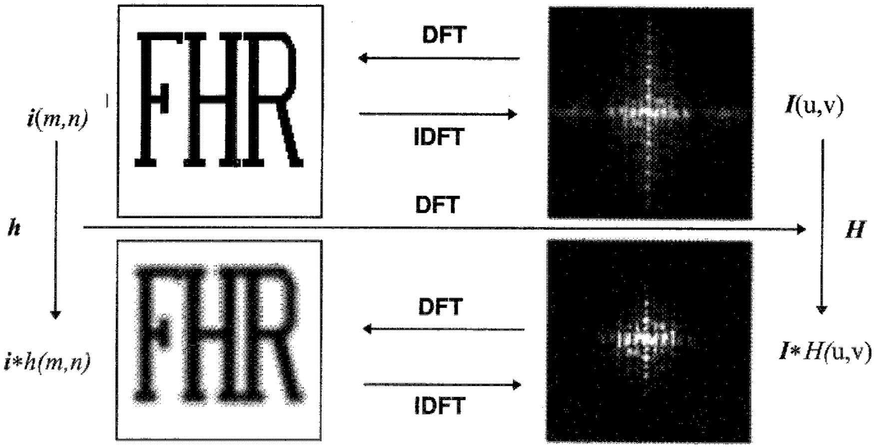

Abb. 4.13 Versanschaulichung des Faltungssatzes

Berechnung von Fourier-Transformationen

Für die numerische Berechnung von Fourier-Transformationen muß man von kontinuierlichen Funktionen übergehen zu Funktionen, die auf einem diskreten Bereich definiert sind. Die zu Beginn des Kapitels gezeigten Integraloperatoren werden dabei durch Summenoperatoren approximiert.

Ein weiterer wichtiger Schritt hin zur effizienten Berechnung von Fourier-Transformationen wurde Mitte der sechziger Jahre mit der Entwicklung der schnellen Fourier-Transformation (FFT) getan. Diese Verfahren gehören zu den wichtigsten numerischen Algorithmen überhaupt. Für eine eingehendere Behandlung dieser Thematik wird auf Anhang A verwiesen.

4.2 Aufgaben

1. Produzieren Sie Aliasing-Effekte, indem Sie eine geeignete Vorlage mit ca. 100 dpi einscannen. Bei manchen Scanner-Bedienprogrammen müssen Sie dazu einen Ausgabedrucker mit niedriger Auflösung einstellen oder Scannen in Fax-Qualität wählen.

2. Drehen Sie das Bild der Abbildung 4.4 um 90 Grad und berechnen Sie davon die Fourier-Transformierte. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Abbildung 4.4.

3. Erzeugen Sie ein Bild mit einem konstanten Grauton und berechnen Sie dessen Fourier-Transformierte.

4. Berechnen Sie die Fourier-Transformierten verschieden großer schwarzer Quadrate und interpretieren Sie die Ergebnisse.

5. Strecken Sie die Cosinus-Schwingung der Abbildung 4.10 durch Zoomen in horizontaler Richtung um die Faktoren 2, 4, 8 und berechnen Sie jeweils die Fourier-Transformierten. Wie sind die Ergebnisse zu verstehen ?

6. Drehen Sie die Cosinus-Schwingung der Abbildung 4.10, schneiden Sie vom Ergebnis wieder ein quadratisches Bild heraus und berechnen Sie dessen Fourier-Transformierte. Wie erklären Sie sich das Resultat ?

7. Die Bilddatei COSXY.BMP enthält eine additive Überlagerung dreier Bildfunktionen:

   $$c + {}^{c}\!/_{4} * \cos(ax) + {}^{c}\!/_{4} * \cos(ay)$$

   Berechnen Sie die Fourier-Transformierte dieses Bildes und interpretieren Sie das Ergebnis.

8. Die Datei RAUTE.BMP enthält ein geschertes Quadrat. Dabei wurde nur die x-Koordinate transformiert, die y- Koordinate aber nicht verändert. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte und interpretieren Sie das Ergebnis.

9. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des Bildes CTSCAN.BMP . Wenden Sie danach auf das Resultat eine inverse Fourier-Transformation an. Ist das Endergebnis mit dem Originalbild identisch ?

Bildverarbeitung interaktiv

Eine Einführung mit multimedialem Lernsystem auf CD-ROM

Von Prof. Dr. Herbert Kopp
Fachhochschule Regensburg

B. G. Teubner Stuttgart 1997